

Geometria affine $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale

s.sp. vettoriale di dim. $k = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ con $v_1, \dots, v_k$ vettori
linearmente indipendenti

Esempi classici

- $n=2, k=1 \rightsquigarrow$ retta per l'origine nel piano
- $n=3, k=1 \rightsquigarrow$ " " " nello spazio
- $n=3, k=2 \rightsquigarrow$ piano per l'origine nello spazio

Descrizione parametrica $\rightsquigarrow$ come spanDescrizione cartesiana $\rightsquigarrow$ (sistema di) equazioni omogeneeUn sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ è del tipo

$$P_0 + \text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})$$

$$P_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

↑
parametri

Esempio Scrivere in parametrica e in cartesiana l'equazione del piano in $\mathbb{R}^4$ (sottospazio affine di dim 2) che passa per

$$A = (1, 0, 1, 0)$$

$$B = (2, 1, 0, 3)$$

$$C = (1, 1, -1, 2)$$

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

$$(1, 0, 1, 0) + t(1, 1, -1, 3) + s(0, 1, -2, 2) \quad (\text{parametrica})$$

Per la cartesiana un aspetto 2 equazioni del tipo

$$ax + by + cz + dw = e$$

1° modo: sostituisco i 3 p.ti nell'equazione e risolvo il sistema

$$\begin{cases} a + c - e = 0 \\ 2a + b + 3d - e = 0 \\ a + b - c + 2d - e = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad e, c \text{ libere}$$

$$d = -e \quad b = 2c - 3d - e = 2c + 2e$$

$$a = -c + e$$

Per ottenere delle equazioni, diamo dei valori a c ed e

$$c=1, e=0 \quad \leadsto \quad a=-1, b=2, c=1, d=0, e=0$$

$$\leadsto \quad -x + 2y + z = 0$$

$$c=0, e=1 \quad \leadsto \quad a=1, b=2, c=0, d=-1, e=1$$

$$\leadsto \quad x + 2y - w = 1$$

La descrizione cartesiana è data dal sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - w = 1 \end{cases}$$

Volevo sì possono fare 2 verifiche

① che i 3 p.ti dati soddisfanno il sistema

② che risolvendo il sistema si ottenga lo stesso piano scritto sopra (o per lo meno una scrittura equivalente dello stesso)

Oss. La rappresentazione cartesiana è comoda per calcolare l'intersezione di 2 sottospazi.

Oss. Una singola equazione in $\mathbb{R}^4$ rappresenta un s.sp. affine di dim 3. Questo passa per l'origine se e solo se l'equazione è omogenea.

2° modo Cerco 2 vettori di $\mathbb{R}^4$ che siano ortogonali ai vettori che generano il piano, cioè $\underline{(1, 1, -1, 3)}_{v_1}$ e $\underline{(0, 1, -2, 2)}_{v_2}$.
Come posso fare questa ricerca?

→ Ovviamente, imponendo prodotto scalare nullo e risolvendo il sistema

→ Completo v_1 e v_2 ad una base, che poi ortogonalizzo con GS $\leadsto \hat{v}_3$ e $\hat{v}_4$ sono ortogonali a v_1 e v_2 .
Questi due vettori sono i coeff. della parte omogenea del sistema. Per trovare la parte non omogenea sostituisco un p.to.

— o — o — o —

TRASFORMAZIONI AFFINI Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice applicazione affine (o affinità) se è del tipo

$$f(x) = Ax + v$$

$\uparrow$ matrice $n \times n$ $\nwarrow$ vettore n -dimensionale

Esempio

$n=2$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 5x - y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A $\vec{x}$ $\vec{v}$

Proprietà 1 La composizione di 2 trasformazioni affini è una trasformazione affine,

Dim. $f(x) = Ax + v$ $g(x) = Bx + w$, Allora

$$g(f(x)) = B f(x) + w = B(Ax + v) + w = \underbrace{(BA)}_{\substack{\uparrow \text{nuova} \\ \text{matrice}}} x + \underbrace{Bv + w}_{\substack{\uparrow \text{nuovo} \\ \text{vettore}}}$$

Oss. La "parte matrice" di $g(f(x))$ è uguale alla composizione delle matrici di $f(x)$ e $g(x)$.

Esempio 1

TRASLAZIONI

$$A = Id$$

$$f(x) = x + v$$

Esempio 2

OMOTETIE CON CENTRO IN O

$$A = \lambda Id \quad v = 0$$

$$f(x) = \lambda x$$

- se $\lambda > 1$ sta dilatando tutto di un fattore λ
- se $\lambda \in (0, 1)$ sta contraendo
- se $\lambda < 0$ c'è anche un ribaltamento

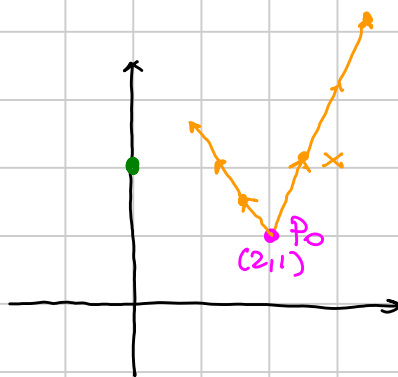
Esempio 3

OMOTETIE CON CENTRO $\neq O$

Strategia

$$x \rightsquigarrow x - P_0 \rightsquigarrow 3(x - P_0) \rightsquigarrow 3(x - P_0) + P_0$$

$\uparrow$ spostato l'origine in P_0 $\uparrow$ moltiplico per 3 $\uparrow$ riporto l'origine al suo posto



$$x \rightsquigarrow 3x - 2P_0 = f(x)$$

(piccola verifica: $f(P_0) = P_0$ come previsto)

Nell'esempio specifico: $P_0 = (2, 1)$

$$f(x, y) = (3x - 4, 3y - 2)$$

Se sostituisco $(x, y) = (0, 2)$ ottengo $(-4, 4)$

Esempio 4 Cosa ottengo se faccio

- prima l'omotetia con centro P_0 e fattore 3
- poi l'omotetia con centro P_1 e fattore 2?

$f(x)$

$g(x)$

$$f(x) \quad x \rightsquigarrow x - P_0 \rightsquigarrow 3(x - P_0) \rightsquigarrow 3(x - P_0) + P_0 = 3x - 2P_0 = f(x)$$

$$g(x) \quad x \rightsquigarrow x - P_1 \rightsquigarrow 2(x - P_1) \rightsquigarrow 2(x - P_1) + P_1 = 2x - P_1 = g(x)$$

$$g(f(x)) = 2f(x) - P_1 = 2(3x - 2P_0) - P_1 = 6x - 4P_0 - P_1$$

Questa è una omotetia di fattore 6 rispetto ad un punto P_2 che resta fisso, cioè $6P_2 - 4P_0 - P_1 = P_2 \rightsquigarrow P_2 = \frac{4}{5}P_0 + \frac{1}{5}P_1$, che volendo posso ricavare conoscendo P_0 e P_1 .

Esempio 5 Cosa succede se faccio

- prima l'omotetia di fattore 2 rispetto a $(2,1)$ P_0
- poi l'omotetia di fattore $\frac{1}{2}$ rispetto a $(3,4)$ P_1

Otengo una traslazione.

$$f(x) \quad 2(x - P_0) + P_0 = 2x - P_0$$

$$g(x) \quad \frac{1}{2}(x - P_1) + P_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}P_1$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2}(2x - P_0) + \frac{1}{2}P_1 = x + \boxed{\frac{1}{2}(P_1 - P_0)}$$

$\uparrow$
vettore di
traslazione.

— o — o —