

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Trovare la forma canonica e la M di passaggio

- 1° fatto : $\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \dim(\ker(A)) = 4 - 2 = 2$
 $\Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore e $m_g(0) = 2$
- 2° fatto : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = 10$ è autovalore e $(1, 1, 1, 1)$ è un con. autovettore
- 3° fatto : $\text{Tr}(A) = 4$, quindi anche $\lambda = -6$ è autovalore.

Quindi gli autovalori sono

- $\lambda = 0$ con $m_g(0) = m_a(0) = 2$
- $\lambda = 10$ con $m_g(10) = m_a(10) = 1$
- $\lambda = -6$ con $m_g(-6) = m_a(-6) = 1$

Forma canonica:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 10)(\lambda + 6)$$

Come trovo una M di passaggio? le colonne devono essere una base di autovettori

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, -1, 1, -1) \leftarrow \text{verificare a mano o trovare risolvendo } Av_2 = -6v_2$$

$$v_3 = (1, 1, -1, -1)$$

$$v_4 = (1, 0, -1, 0)$$

Una possibile M ha v_1, v_2, v_3, v_4 come colonne.

La matrice A è pure simmetrica, quindi deve esistere anche una M ortogonale che diagonalizza.

Sò già che v_1, v_2, v_3 sono ortogonali (autovettori con autovalori diversi). Mi basta cambiare v_4 (lo posso fare con GS oppure con la formula misteriosa in versione $\mathbb{R}^4$).

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \rightsquigarrow (-1, 1, -1, -1, -\det A_{1,2}, \det A_{1,3}, -\det A_{1,4})$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \quad \text{è simile alla precedente?}$$

Autovalori e pol. caratteristico sono gli stessi, ma non basta per dire che anche questa è diagonalizzabile.

Devo controllare la molteplicità.

È ovvio che per 10 e -6 sono tutte 1.

Per 0 è ovvio che $m_a(0) = 2$, ma

$$m_g(0) = \dim(\ker(B - 0I)) = \dim(\ker(B)) = 4 - \text{rang}(B) = 1$$

$\text{rang} = 3$ perché $\rightarrow \det B_{4,1} \neq 0$

$\rightarrow B$ è a scala e ha 3 pivot

Quindi B non è diagonalizzabile e la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B non è simile alla A di prima.

↑ blocco di jordan 2×2 con autovalore = 0

Come trovo la M di passaggio? le sue colonne v_1, v_2, v_3, v_4 devono verificare

$$A v_1 = 10 v_1 \quad (v_1 \text{ è autovettore di } 10)$$

$$A v_2 = -6 v_2 \quad (v_2 \text{ " " " } -6)$$

$$A v_3 = 0 \quad (v_3 \text{ è una base del } \ker A)$$

$$A v_4 = v_3 \quad \leftarrow \text{risolvo questa dopo aver trovato } v_3.$$

Esempio 3

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = A$$

(1) Per quali valori di a posso diagonalizzare con una matrice ortogonale?

Se e solo se A è simmetrica, cioè se e solo se $a = 3$

(2) Per $A = 3$, chi è la forma canonica?

Sulla diag. finiscono gli autovalori, che so già essere reali

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 7-\lambda \end{pmatrix} \quad \det = 14 - 9\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 20}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2} \quad \begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{61}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9-\sqrt{61}}{2} \end{pmatrix}$$

(3) Per quali a si ha che $\ker A \neq \{0\}$?

$$\Leftrightarrow \text{rang}(A) < 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow 14 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{14}{3}$$

(4) Per quali a è diagonalizzabile sui reali?

Calcolo il polinomio caratteristico

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ 3 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 - 3a$$

Senza autovalori reali, quindi $\Delta \geq 0$ $\Delta = 81 - 56 + 12a$
 $= 12a + 25$

- Se $\Delta > 0$, allora gli autovalori sono reali e distinti, quindi di sicuro è diagonalizzabile ($a > -\frac{25}{12}$)
- Se $\Delta < 0$, allora gli autovalori sono complessi (veramente), quindi è diagonalizzabile sui complessi, ma non sui reali
- Se $\Delta = 0$, allora c'è un unico autovalore con $m_a = 2$ e tutto dipende da m_g . lo faccio a mano: $a = -\frac{25}{12}$

$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{25}{12} \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ l'autovalore è $\frac{9}{2}$ (metà della traccia)

$m_g\left(\frac{9}{2}\right) = \dim(\ker(A - \frac{9}{2} \text{Id}))$

$A - \frac{9}{2} \text{Id} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{25}{12} \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ Rang = 1 $\leadsto m_g = 1$

Quindi per $a = -\frac{25}{12}$ la matrice A non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$, e la sua forma canonica è

$\begin{pmatrix} +\frac{9}{2} & 1 \\ 0 & +\frac{9}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jordan } 2 \times 2 \text{ con autovalore } \frac{9}{2}$

Come poi trovare la base jordanizzante (o la M di passaggio?)

Risolvere:

$A v_1 = +\frac{9}{2} v_1$ (v_1 è autovettore di $+\frac{9}{2}$) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, -3$
 $(5, -6)$

$A v_2 = +\frac{9}{2} v_2 + v_1$ (dalla seconda colonna della matrice)

Fare il conto per verifica.

— 0 — 0 —