

Back to dim. BINET

Fatto 1 Sia M una matrice. Allora

$$\text{Det}(e_1 M, \dots, e_n M) = \text{Det}(R_1^M, \dots, R_n^M) = \text{Det } M$$

Fatto 2 Come casi particolari del precedente abbiamo

$$\text{Det}(e_1 A, \dots, e_n A) = \text{Det } A$$

$$\text{Det}(e_1 AB, \dots, e_n AB) = \text{Det}(AB)$$

Fatto 3 Posto $f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1 B, \dots, v_n B) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$

si verifica (fatto del precedente) che $f(v_1, \dots, v_n)$ soddisfa $(\text{Det } 1, \dots, \text{Det } 4)$, da cui

$$f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$$

Fatto 4 $\text{Det}(A) = \text{Det}(e_1 A, \dots, e_n A)$ (Fatto 2)

$$= f(e_1 A, \dots, e_n A) \quad (\text{Fatto 3})$$

$$= \text{Det}(e_1 AB, \dots, e_n AB) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$$

$$\downarrow (\text{Fatto 2})$$

$$= \text{Det}(AB) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$$

Moltiplicando per $\text{Det } B$ ottengo la tesi

Oss. Resterebbe il caso in cui $\text{Det } B = 0$.

Dim. CRAMER Siano $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A .

La soluzione $x = (x_1, \dots, x_n)$ del sistema lineare è tale che

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = b$$

Ora $\text{Det}(A) = \text{Det}(C_1, \dots, C_n)$

Sostituisco la colonna i -esima con b . Cosa succede?

$$\text{Det}(A_i) = \text{Det}(C_1, \dots, b, \dots, C_n)$$

↑
ho sostituito
 C_i con b

$$= \text{Det}(C_1, \dots, x_1 C_1 + \dots + x_n C_n, \dots, C_n)$$

$$= x_1 \text{Det}(C_1, \dots, C_1, \dots, C_n) + x_2 \text{Det}(C_1, \dots, C_2, \dots, C_n) + \dots$$

} sono tutti $= 0$ tranne quello in cui vado a mettere C_i

$$= x_i \text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

$$= x_i \text{Det } A$$

Dividendo ottengo $x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$

FORMULA PER LA MATRICE INVERSA

1° modo: parto da $(A; I)$ e lavoro alla Gauss fino ad avere $(I; B)$. Allora $B = A^{-1}$.

2° modo:

- ① A_{ij}
- ② segui
- ③ Trasposta
- ④ Divisione per il determinante

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{Det } A = 3 + 8 + 6 - 1 = 16$$

① $\begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ 6 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Ho sostituito ogni elemento a_{ij} con A_{ij} .

② Aggiusto i segni secondo la sdita regola

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -6 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

③ $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

④ $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Esempio 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

① $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

④ $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Oss. Volendo la formula per la matrice inversa segue da CRAMER.

Ad esempio, detta $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la prima colonna dell' inversa, deve succedere

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con CRAMER
trovo $x_1, \dots, x_n$

FORMULA PER I VETTORI PERPENDICOLARI

Dati $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (u_2 w_3 - u_3 w_2, -u_1 w_3 + u_3 w_1, u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

Detta A la matrice da cui siamo partiti, si tratta del vettore

$$(A_{1,1}, -A_{1,2}, A_{1,3})$$
$$z = (z_1, z_2, z_3)$$

Perché questo $\vec{z}$ sia $\perp$ sia a U sia a W

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Se sviluppo il Det rispetto alla 1^a riga ottengo

$$u_1 A_{1,1} - u_2 A_{1,2} + u_3 A_{1,3} = 0$$

$\uparrow$ prodotto scalare tra $\vec{z}$ e $\vec{U}$

$\uparrow$ ci sono 2 righe uguali

Analogamente

$$\langle \vec{z}, \vec{W} \rangle = w_1 A_{1,1} - w_2 A_{1,2} + w_3 A_{1,3} =$$

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} w \\ u \\ w \end{pmatrix} = 0$$

— 0 — 0 —

Analogo in dimensione superiore, ad esempio in dim. = 4.

Sono dati 3 vettori x, y, z in $\mathbb{R}^4$. Voglio trovare un vettore w che sia $\perp$ a tutti e 3.

Metodo banale Scrivo $w = (a, b, c, d)$, auspicio di essere $\perp$ a x, y, z e ho 3 equazioni in 4 incognite

Con i determinanti

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

Considero il vettore

$$w = (A_{1,1}, -A_{1,2}, A_{1,3}, -A_{1,4})$$

Questo è una possibilità.

Si dimostra come nel caso 3×3 .

— 0 — 0 —

Esercizio $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ $C = (0, 1, 0)$ $D = (2, 1, 1)$

Calcolare il volume del tetraedro con vertici in A, B, C, D .

1° modo

Calcolo l'area di ABC , pensandolo come base

Calcolo la distanza tra D ed il piano $ABC \rightsquigarrow$ altezza

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area}(ABC) \cdot \text{altezza}$$

2° modo

Calcolo $B-A, C-A, D-A$ e faccio il Det e divido per 6

(Potevo fare anche $A-B, C-B, D-B, \dots$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1 - 2 - 2 + 1 = -4$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

3° modo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vol} = \frac{1}{6} |\text{Det matrice } 4 \times 4|$$

Perché funziona?

lavoriamo alla Gauss in modo da lasciare un solo 1 nell'ultima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ora sviluppo alla Laplace rispetto alla quarta colonna ottengo

$$-1 \cdot \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

matrice 3×3 precedente ottenuta facendo le differenze

Analogamente, dati 3 p.ti nel piano $A = (a_1, a_2)$

$$B = (b_1, b_2)$$

$$C = (c_1, c_2)$$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \text{poi val. assoluto}$$

— 0 — 0 —