

SVILUPPI DI LEIBNITZ

Poco utili per il calcolo operativo dei determinanti

Forniscono una dim. alternativa dell'esistenza e chiariscono la struttura di un determinante.

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \boxed{aei} + \boxed{bfg} + \boxed{cdh} - ceg - bdi - afh$$

- ① Tutti i termini che compaiono è il prodotto di 3 elementi della matrice, presi in modo che ce ne sia esattamente uno per riga ed uno per colonna.
- ② Tutti i prodotti di questo tipo compaiono nello sviluppo
- ③ Per decidere il segno, associa ad ogni termine una permutazione degli elementi della base canonica

$$bdh \rightsquigarrow e_2, e_1, e_3$$

Il segno dipende da quanti scambi servono per arrivare con l'ordinamento classico $\{e_2, e_1, e_3\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3\} \rightsquigarrow \text{segno} -$

Altro esempio: $bfg \rightsquigarrow \{e_2, e_3, e_1\} \rightsquigarrow \{e_1, e_3, e_2\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3\} \rightsquigarrow \text{segno} +$

Esempio

$$\begin{pmatrix} * & * & \textcircled{*} & * \\ * & \textcircled{*} & * & * \\ * & * & * & \textcircled{*} \\ \textcircled{*} & * & * & * \end{pmatrix}$$

- Il Det sarà la somma di $4! = 24$ addendi
- Ogni addendo è il prodotto di 4 termini
- Il segno $\pm$ dipende dagli scambi

$$\{e_3, e_2, e_4, e_1\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_4, e_3\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \quad 2 \text{ scambi, quindi segno} +$$

Caso particolare: se c'è una riga di tutti 0, allora tutti gli addendi sono uguali a zero.

Idem se c'è una colonna di tutti zeri,

Se la matrice è diagonale, c'è al massimo un addendo che è diverso da 0.

Teorema di Binet

$$\text{Det}(AB) = \text{Det} A \cdot \text{Det} B$$

Si intende che A e B sono matrici $n \times n$.

Conseguenza $\text{Det}(A^{-1}) = [\text{Det}(A)]^{-1} = \frac{1}{\text{Det} A}$

Dim

$$A \cdot A^{-1} = \text{Id}, \text{ quindi per Binet}$$

$$1 = \text{Det}(\text{Id}) = \text{Det} A \cdot \text{Det}(A^{-1}), \text{ da cui la tesi. } \square$$

Dim. BINET

Siano A e B matrici $n \times n$.

Dati n vettori $v_1, \dots, v_n$ considero il numero

$$\text{Det}(v_1 B, v_2 B, \dots, v_n B) \cdot \frac{1}{\text{Det} B} = f(v_1, \dots, v_n)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

↑ n vettori riga, quindi ha senso farne il determinante

Si verifica che $f(v_1, \dots, v_n)$ soddisfa le proprietà $(\text{Det} 1), \dots, (\text{Det} 4)$.

Se lo facessi, avrei che

$$f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(AB)$$

$(\text{Det} 1)$ $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Cosa succede se faccio

$$\begin{aligned} f(e_1, \dots, e_n) &= \text{Det}(e_1 B, \dots, e_n B) \cdot \frac{1}{\text{Det} B} \\ &= \text{Det}(R_1^B, \dots, R_n^B) \cdot \frac{1}{\text{Det} B} \end{aligned}$$

$$= \text{Det} B \cdot \frac{1}{\text{Det} B} = 1$$

(Det 2) Se ci sono v_i e v_j uguali, allora $f(v_1, \dots, v_n) = 0$.

$$f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(\dots, \underbrace{v_i B, \dots, v_j B}_{\text{uguali}}, \dots) \frac{1}{\text{Det } B}$$

$$= 0$$

La verifica di (Det 3) e (Det 4) è simile.

Aggiunto dopo video: così
la dim. non è completa.
Vedi inizio lezione
successiva

Formula di CRAMER per i sistemi lineari SOLO PER SISTEMI $\square$

Sistema lineare $n \times n$:

$$A x = b$$

$\uparrow$ matrice $n \times n$ $\uparrow$ vettore colonna
 incognite lungo n

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$$

dove A_i è la matrice ottenuta sostituendo la colonna i -esima di A con la colonna dei termini noti b .

La formula funziona se $\text{Det } A \neq 0$ e questa condizione garantisce che la soluzione esiste ed è unica per ogni b .

Esempio

$$2x + 3y - z = 2$$

$$x - y + 3z = 1$$

$$x + z = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\text{Det } A}$$

$$y = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}}{\text{Det } A}$$

$$z = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{\text{Det } A}$$

Vantaggio: posso calcolare una incognita senza dover calcolare le altre

$$x = \frac{-2 + 45 - 5 - 3}{-2 + 9 - 1 - 3} = \frac{35}{3}$$