

Determinante 3×3

$$v_1 = (a, b, c)$$

$$v_2 = (d, e, f)$$

$$v_3 = (g, h, i)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(v_1, v_2, v_3) = \text{Det}(ae_1 + be_2 + ce_3, de_1 + ee_2 + fe_3, ge_1 + he_2 + ie_3)$$

= ora dovrai usare la linearità per portare fuori le somme e le costanti (vengono 27 comodi termini)
 = tenendo conto che tutti quelli con 2 vettori uguali sono nulli

$$= aei \underbrace{\text{Det}(e_1, e_2, e_3)}_1 + bfg \underbrace{\text{Det}(e_2, e_3, e_1)}_1$$

$$+ cdh \underbrace{\text{Det}(e_3, e_1, e_2)}_1 + ceg \underbrace{\text{Det}(e_3, e_2, e_1)}_{-1}$$

$$+ bdi \underbrace{\text{Det}(e_2, e_1, e_3)}_{-1} + afh \underbrace{\text{Det}(e_1, e_3, e_2)}_{-1}$$

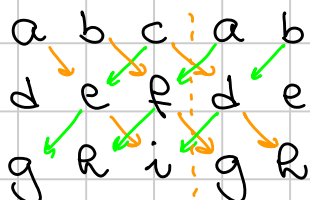
$$\text{Det}(e_2, e_3, e_1) = -\text{Det}(e_1, e_3, e_2) = \text{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$\text{Det}(e_3, e_1, e_2) = -\text{Det}(e_1, e_3, e_2) = \text{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

Conclusione:

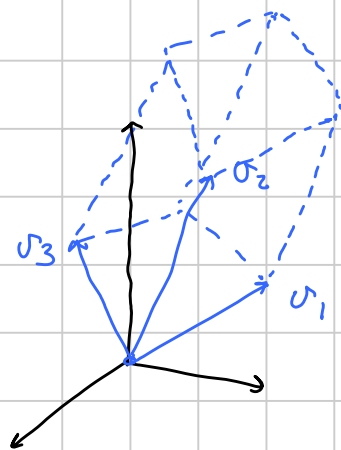
$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

REGOLA DI SARRUS



Interpretazione geometrica: volume del "parallelepipedo" determinato dai vettori v_1, v_2, v_3

Questo avrebbe dimostrato, ed è un esercizio di geometria analitica.



corretto dopo video

Idea: Vol parallelepipedo = 6 Vol. tetraedro

$$= \text{Area base} \cdot \text{altezza}$$

↑
area parallelogramma
dato da v_1 e v_2

←
distanza di v_3
dal piano che
contiene v_1 e v_2

Ancora una volta Vol = 0 $\Leftrightarrow$ parallelepipedo degenere

$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ lin. dipendenti

— 0 — 0 —

Achtung! Non vale l'analogo di SARRUS dalla dimensione 4 in poi.

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che $(1, 0, 1), (2, 3, 4), (0, -1, 5)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) \\ &\quad - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) \\ &= 15 - 2 + 4 = 17 \neq 0 \quad \text{Ok.} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Determinante e algoritmo di GAUSS

Come cambia il Det se lavoro alla Gauss sulla matrice?

- scambiare 2 righe comporta un cambio di segno
- sostituire una riga R_i con $R_i + b R_j$ (altrettanto buona)

$$\text{Det}(R_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } i}}{R_i + b R_j}, \dots, R_n) = \text{Det}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_n) + b \text{Det}(R_1, \dots, \underbrace{R_j, \dots, R_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{0 perché } R_j \text{ c'è 2 volte}}})$$

Quindi le operazioni ultrarotodosse non cambiano il Det.

Conclusione: se uso Gauss in versione ultrarotodossa, allora

$$\text{Det}(\text{matrice finale}) = \text{Det}(\text{matrice iniziale}) \cdot (-1)^{\textcircled{*}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{numero degli} \\ \text{scambi di} \\ \text{riga} \end{array}$$

Oss Se non faccio l'ultrarotodossa, cioè cambio R_i con $aR_i + bR_j$, il determinante risulta moltiplicato per a .

Conseguenza: se so calcolare il Det delle matrici a scala, so calcolare tutti i determinanti (basta ricordare quanti scambi di riga si sono fatti).

— o — o —

Determinante delle matrici DIAGONALI

Una matrice diagonale ha tutti 0 al di fuori della diagonale principale, sulla quale volendo ci sono altri zeri oppure no

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

Fatto: $\text{Det}(\text{Diag}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

Dim. $\text{Det}(\text{Diag}) = \text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \text{Det}(e_1, e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \text{Det}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot 1 \end{aligned}$$

— o — o —

Matrici TRIANGOLARI SUPERIORI

Sono matrici che hanno tutti 0 sotto la diagonale principale

quello che per
pare

tutti
zeri

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

Fatto generale $\text{Det}(T) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

Dim. Il primo vettore v_1 si scrive come

$$v_1 = \lambda_1 e_1 + \underbrace{* e_2 + \dots + * e_n}_w$$

quindi

$$\text{Det}(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(\lambda_1 e_1 + w, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$+ \text{Det}(w, v_2, \dots, v_n)$$

questi sono n vettori tutti con la prima componente nulla, quindi sono linearmente dipendenti, quindi il loro Det è 0.

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

Allo stesso modo posso scrivere $v_2 = \lambda_2 e_2 + w$
 $\uparrow$
 ha solo comp. da e_3 in poi

$$\text{Det}(\text{iniziale}) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2 + w, v_3, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$+ \lambda_1 \text{Det}(e_1, w, v_3, \dots, v_n)$$

= 0 perché sono n vettori con la 2ª comp. = 0, quindi sono lin. dip.

Procedendo allo stesso modo si ottiene che $\text{Det}(T) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

— 0 — 0 —

Come calcolo il Det di una matrice? Lavoro alla Gauss fino ad avere una matrice a scala, che sarà triangolare superiore, per cui lo so fare.

Chi dice che lavorando alla Gauss in modo diverso, ma sempre ultrarortodosso, venga sempre lo stesso risultato?

Se venisse diverso, vorrebbe dire che non esiste nessuna funzione che verifica $(\text{Det } 1), \dots, (\text{Det } 4)$.

Detto altrimenti: Gauss dimostra l'unicità del Det .

Se dimostro l'esistenza, allora deve per forza venire uguale anche lavorando in modo diverso.

— o — o —