

FILOSOFIA

Spazi vettoriali

vettori

{ basi

Componenti

Numeri

funzioni

Applicazioni lin. tra sp. vettoriali

{ basi

Matrici

Tabelle di numeri

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ Considero $f: V \rightarrow W$ definita come $f(p(x)) = p'(x)$ (derivata)

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2$$

È una funzione lineare perché

$$[p(x)+q(x)]' = p'(x)+q'(x)$$

$$[\alpha p(x)]' = \alpha p'(x)$$

Considero in partenza ed arrivo la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.Voglio scrivere la matrice associata ad f risp. a queste basi

$$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$f(x) = 1$$

$$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$f(x^3) = 3x^2$$

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \\ x \rightarrow \\ x^2 \rightarrow \\ x^3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(1) \quad f(x) \quad f(x^2) \quad f(x^3)$

Se volessi calcolare $f(3x - x^2 + x^3)$

diventa

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

componenti di $f(\dots)$

↑ componenti del polinomio dato

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$
 $W = \mathbb{R}^2$

Considero $f: V \rightarrow W$ $f(p(x)) = (p(3), p'(2))$

Si verifica facilmente che è lineare.

Voglio la matrice di f usando

→ in partenza la base $\{1, x, x^2\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$

→ in arrivo la base $\{(1,0), (0,1)\}$ $\{w_1, w_2\}$

$f(v_1) = (1, 0) \rightarrow (\text{polinomio calc. in 3, derivata calc. in 2})$

$f(v_2) = (3, 1)$

$f(v_3) = (9, 4)$

La matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\leftarrow w_1$
 $\leftarrow w_2$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

Il gruppo che volevo $f(x^2 - 7x + 2)$
 $\uparrow 2v_1 - 7v_2 + v_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcolo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -10w_1 - 3w_2 = (-10, -3)$

Riprova $(p(3), p'(2)) = (-10, -3)$.
 $\nearrow p'(x) = 2x - 7 \searrow$

Variante: stessa applicazione, ma uso

→ in partenza la base $\{x^{v_1} - 1, x^{v_2} + x, -x^{v_3}\}$ } verificare che siano una base!
 → in arrivo la base $\{(1,1), (1,0)\}$ $\{w_1, w_2\}$

Ricordo $f(p(x)) = (p(3), p'(2))$

$$f(v_1) = f(x-1) = (2, 1) = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$$

$$f(v_2) = f(x^2+x) = (12, 5) = 5 \cdot w_1 + 7 \cdot w_2$$

$$f(v_3) = f(-x) = (-3, -1) = -1 \cdot w_1 - 2 \cdot w_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix}$

Proviamo a calcolare $f(x^2-7x+2)$ usando la nuova matrice

→ scrivo x^2-7x+2 come comb. lin. di v_1, v_2, v_3

$$x^2-7x+2 = -2v_1 + v_2 + 6v_3 \quad (\text{verifica!})$$

→ Moltiplico la matrice B per il vettore colonna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

← comp. di $f(x^2-7x+2)$ rispetto alla base w_1, w_2

→ ricostruisco l'elemento: $f(x^2-7x+2) = -3w_1 - 7w_2$

$$= -3(1,1) - 7(1,0)$$

$$= \underline{(-10, -3)}$$

venuto come prima!

— o — o —

Domanda In uno spazio V ho una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e poi ho una base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$.

Se conosco le componenti di un vettore v rispetto alla prima base, come trovo le componenti di v rispetto alla seconda base?

Possibilmente senza fare tutte le volte il sistema di equare...

MATRICE DI CAMBIO DI BASE Prende in INPUT le componenti rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e restituisce in OUTPUT le comp. dello stesso vettore risp. alla base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$.

Si costruisce così

→ Prendo v_1 e lo scrivo come comb. lin. di $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$:

$$v_1 = \underbrace{C_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{1ª colonna}}} \hat{v}_1 + \dots + \underbrace{C_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{1ª colonna}}} \hat{v}_n$$

→ Più in generale, la k -esima colonna sono le componenti di v_k rispetto alla base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$

Questa matrice trasforma le componenti come detto ($n \times n$)

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \hat{v}_1 \\ \leftarrow \hat{v}_2 \\ \leftarrow \hat{v}_n \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_n \end{matrix}$

Come funziona il prodotto tra una matrice ed un vettore colonna

1° caso $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{1ª colonna di } A \quad (C_1 | C_2 | \dots | C_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_1$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_1 & C_2 & C_n \end{matrix}$
colonne

2° caso $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posiz. } k = k\text{-esima colonna di } A$

3° caso $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_n \cdot C_n$

Il prodotto tra una matrice A ed un vettore colonna x è come fare una comb. lin. delle colonne di A usando gli el. di x come coeff.

Questo fa funzionare tutto!

Ad esempio nel caso del cambio di base, se in input do la colonna $x_1, \dots, x_n$, che corrispondeva al vettore

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

in output mi ritorna

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n$$

$v_1, \dots, v_n$ scritti rispetto
alla nuova base

Traducendo: se do in input $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posk}$
ritorno C_k che sono le
comp. di v_k rispetto alla nuova base.

— o — o —