

SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

Sia V uno sp. vett. Siano W_1 e W_2 due sottosp. vettoriali.

Demande:

$W_1 \cap W_2$ è un sottospazio?

SI

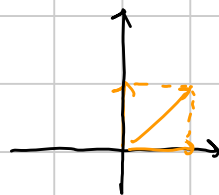
$W_1 \cup W_2$ è un sottospazio?

NO

(in generale)

Esempio In $\mathbb{R}^2$ prendo i 2 assi:

sono sottoposti, ma la loro unione non lo è



Dim. che $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio

Prendi v_1 e v_2 in $W_1 \cap W_2$

$v_1 + v_2 \in W_1$ (perché somma di el. di W_1)

$$v_1 + v_2 \in W_2 \quad (\quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \quad W_2)$$
$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$$

Analogo discorso per $\alpha'v_1$.

□

Somma di sottospazi

Sia X uno sp. vet.

Siano V e W due sottosp. vett.

Si definisce

$$V + W = \{ v + w : v \in V, w \in W \} = \text{tutte le possibili somme di un el. di } V \text{ e uno di } W$$

Lemma $V+W$ è un sottospazio vettoriale di X .

Dim. Prendo due el. qualunque di $V+W$: v_1+w_1 e v_2+w_2 .

La loro somma è

$$\begin{array}{ccccccc} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) & = & (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) & \in & V + W. \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\in V} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\in W} \\ v & w & v & w & & & \end{array}$$

Analogamente $\alpha(v_1 + w_1) = \underbrace{\alpha v_1}_{\in V} + \underbrace{\alpha w_1}_{\in W} \in V + W$. $\square$

Teorema (Formula di GRASSMANN)

Siano V e W due sottospazi di uno sp. vett. X .

Allora

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

Dim. Siano $k = \dim(V \cap W)$, $m = \dim V$, $n = \dim W$.

Voglio dim. che $\dim(V+W) = m+n-k$

Prendiamo delle basi.

- Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $V \cap W$
- Essendo $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. indip. in V , posso completarli ad una base di V aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_m$
- Essendo $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. indip. in W , posso completarli ad una base di W aggiungendo $w_{k+1}, \dots, w_n$.

Dico che $\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{V \cap W}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_m}_V, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_n}_W$ sono una base di $V+W$. Se lo dim. ho finito perché sono esattamente $\underbrace{k}_{V \cap W} + \underbrace{(m-k)}_V + \underbrace{(n-k)}_W = m+n-k$

Devo fare 2 verifiche

(1) Sono generatori Ogni elemento $x \in V+W$ si scrive come

$$x = \underbrace{v}_{V} + \underbrace{w}_{W} = \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m}_V + \underbrace{d_1 v_1 + \dots + d_k v_k + d_{k+1} w_{k+1} + \dots + d_n w_n}_W$$

quindi x è comb. lineare degli $m+n-k$ el. dati.

(2) Sono una base Prendo una comb. lin. che fa 0 generica

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_m v_m + c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n = 0$$

e spero che tutti i coeff. siano nulli,

Porto a dx tutti i w :

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + b_m v_m}_{\in V} = \underbrace{-c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n}_{\in W} \quad (*)$$

ma allora sta in $V \cap W$, ma allora è comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$.

In particolare

$$-c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k$$

Portando tutto dalla stessa parte abbiamo una comb. lin. di

$v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ che fa 0, ma essendo questi una base di W tutti i coeff. devono essere nulli, quindi in particolare $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$.

Ma allora tornando ad (*) il termine a dx è 0, quindi anche quello a sx è 0, ma quello a sx è una comb. lin. di

$v_1, \dots, v_m$ che è una base di V , quindi ancora una volta tutti i coeff. sono nulli, quindi tutti gli a_i ed i b_i sono nulli.

— 0 — 0 —

Caso particolare Se $V \cap W = \{0\}$, cioè contiene solo lo 0, allora $\dim(V \cap W) = 0$, quindi la formula diventa

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W$$

se l'intersezione è solo $\{0\}$.

Def. Se $V \cap W = \{0\}$ si dice che $V+W$ è una somma diretta e si scrive

$$V \oplus W$$

↑ somma diretta

Fatto fondamentale Ogni vettore $x \in V \oplus W$ si scrive in modo unico come somma di un elemento di V ed un elemento di W .

Dim. Supponiamo che si scriva in 2 modi: $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$.

Allora $\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_1 - w_2}_{\in W}$. Quindi $v_1 - v_2 = w_1 - w_2 \in V \cap W$

ma allora è per forza 0, cioè $v_1 - v_2 = w_1 - w_2 = 0$, quindi $v_1 = v_2$
 $w_1 = w_2$. $\square$

Ogni $x \in V \oplus W$ si scrive in modo unico come $x = v + w$. Allora v e w si dicono le componenti di x rispetto a V e W .

— o — o —

Esempio 1 $X = \mathbb{R}^3$. Siano V e W due s.sp. con $\dim V = \dim W = 2$ (piani per l'origine).

Cosa possiamo dire dell'intersezione?

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

" "
 2 2

$\downarrow$
 ≥ 2 e ≤ 3 quindi le possibilità sono

$$3 + 1 \quad (V+W = \mathbb{R}^3, V \cap W = \text{retta})$$

$$2 + 2 \quad (V \cap W \text{ ha dim } 2, \text{ quindi } V = W)$$

Esempio 2 $X = \mathbb{R}^5$ $\dim V = \dim W = 3$

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = 6$$

3, 4, 5

$V = W$

3

+

3
2
1

non è mai 0, quindi la somma

non può essere diretta

4

+

5

+

Esempio 3 $X = \mathbb{R}^3$ $V = \text{Span} \{ (1,0,1), (2,0,1) \}$
 $W = \text{Span} \{ (1,1,1), (1,2,1) \}$

$\dim V = 2$ (i generatori sono 2 e sono lin. indep. perché non sono uno multiplo dell'altro)

$\dim W = 2$ (stesso motivo)

Come ricavare $\dim(V+W)$? È semplice che

$$V+W = \text{Span} \{ (1,0,1), (2,0,1), (1,1,1), (1,2,1) \}$$

È evidente che i 4 vettori dati NON possono essere lin. indip.
(se lo fossero, la dimensione di $\mathbb{R}^3$ sarebbe ≥ 4).

Provo ad eliminare qualcuno sperando che i rimanenti siano
lin. indip. Provo ad eliminare l'ultimo. Restano

$$(1, 0, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 1)$$

Per verificare che sono lin. ind. li metto in colonna e lavoro
alla Gauss

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

PIVOT OK

Sono lin. indip., quindi $\dim(V+W) = 3$, quindi $\dim(V \cap W) = 1$
— 0 — 0 —