

A.A. 2014/2015
Corso di Algebra Lineare
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Vettori geometrici nel piano cartesiano. Operazioni tra vettori: somma, prodotto per un numero, prodotto scalare, norma, distanza.	8
Lezione 02. Coordinate polari nel piano. Interpretazione geometrica del prodotto scalare (usando le coordinate polari o il teorema di Carnot). Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.	12
Lezione 03. Rette nel piano: equazione cartesiana vs equazione parametrica. Significato dei coefficienti nei vari tipi di rappresentazione.	16
Lezione 04. Introduzione ai sistemi lineari. Esempi con soluzione unica, nessuna soluzione, infinite soluzioni. Algoritmo di Gauss.	21
Lezione 05. Matrici a scala e pivot. Interpretazione dei risultati dell'algoritmo di Gauss. Esempi di applicazione. Variante alla Jordan dell'algoritmo di Gauss.	25
Lezione 06. Geometria analitica nello spazio. Equazione parametrica della retta nello spazio. Mutua posizione di due rette nello spazio.	29
Lezione 07. Piani nello spazio: equazione cartesiana e parametrica. Significato geometrico dei coefficienti nell'equazione cartesiana. Passaggio dalla parametrica alla cartesiana.	34
Lezione 08. Intersezione di due rette nel piano (date in varia forma) e nello spazio, intersezione di due piani nello spazio, intersezione di una retta ed un piano nello spazio.	39
Lezione 09. Matrici e operazioni tra matrici: somma, prodotto per un numero, prodotto tra matrici. Trasposta di una matrice. Interpretazione dei sistemi lineari in termini di matrici.	43
Lezione 10. Esercizi di geometria analitica nello spazio: area di un triangolo, volume di un tetraedro, piede dell'altezza di un triangolo. Sistemi lineari $n \times n$	48
Lezione 11. Definizione di campo di numeri, di spazio vettoriale e sottospazio vettoriale. Esempi classici di campo e spazio vettoriale. Primi esempi di sottospazi vettoriali.	52
Lezione 12. Definizioni: combinazione lineare, Span, sistema di generatori, vettori linearmente indipendenti e dipendenti, base, dimensione. Basi canoniche e dimensione degli spazi vettoriali classici. Esempio di spazio di dimensione infinita.	56

Lezione 13. Componenti di un vettore rispetto ad una base. Esempi di basi e calcolo di componenti. Interpretazione dei sistemi lineari in termini di combinazioni lineari di colonne.	61
Lezione 14. Teorema di esistenza della base. Tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi. Come ottenere basi per eliminazione da un sistema di generatori o aggiungendo elementi ad un insieme di vettori linearmente indipendenti.	66
Lezione 15. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann. . .	71
Lezione 16. Presentazione cartesiana e parametrica di un sottospazio vettoriale. Esempi di sottospazi vettoriali descritti in vario modo e relative basi e dimensione.	76
Lezione 17. Applicazioni lineari. Teorema di struttura. Matrice associata ad un'applicazione lineare dopo aver scelto basi in partenza ed arrivo.	81
Lezione 18. Esempi di costruzione della matrice associata ad un'applicazione lineare. Costruzione di una matrice di cambio di base.	86
Lezione 19. Ker e immagine di un'applicazione lineare. Teorema rank-nullity (relazione tra le dimensioni di ker, immagine e spazio di partenza). Conseguenze in termini di iniettività e surgettività.	91
Lezione 20. Interpretazione dei sistemi lineari in termini di ker e immagine. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo (soluzione qualunque più soluzione generica dell'omogeneo).	95
Lezione 21. Matrice inversa: quando esiste e come si calcola con l'algoritmo alla Gauss-Jordan. Giustificazione dell'algoritmo. Uso delle matrici inverse nei cambi di base.	99
Lezione 22. Dimostrazione del "teorema di sostituzione" (punto di partenza per i teoremi su basi e dimensione di spazi vettoriali). Esercizi sulla matrice associata ad un'applicazione lineare.	103
Lezione 23. Proprietà della matrice trasposta ed inversa. Esercizi misti su sottospazi vettoriali e cambi di base.	108
Lezione 24. Introduzione ai determinanti: obiettivi, definizione assiomatica, prime proprietà (alternanza e annullamento nel caso di vettori linearmente dipendenti). Enunciato del teorema di esistenza ed unicità. Caso 2×2 con interpretazione geometrica.	112
Lezione 25. Determinante nel caso 3×3 : regola di Sarrus e interpretazione geometrica. Determinante e algoritmo di Gauss. Determinante di matrici diagonali e triangolari superiori. Unicità del determinante via algoritmo di Gauss.	117
Lezione 26. Sottomatrici e minori. Sviluppi di Laplace (ricorsivi) per colonne e per righe. Enunciato dell'esistenza del determinante via sviluppi per colonne. Dimostrazione che gli sviluppi per righe coincidono con quelli per colonne. Determinante della matrice trasposta.	122

Lezione 27. Descrizione dello sviluppo di Leibnitz (con le permutazioni) del determinante. Teorema di Binet (enunciato e parte della dimostrazione). Regola di Cramer per i sistemi lineari.	127
Lezione 28. Dimostrazione del teorema di Binet e della formula di Cramer. Formula per la matrice inversa con i determinanti. Formula per i vettori perpendicolari e sua interpretazione con i determinanti. Formule per il volume del tetraedro.	130
Lezione 29. Rango di una matrice. Dimostrazione completa dell'equivalenza tra R-rango, C-rango, D-rango. Rango ed algoritmo di Gauss. Pivot e rango delle matrici a scala.	136
Lezione 30. Rango e sistemi lineari: teorema di Rouché-Capelli. Esempi di utilizzo del rango nella risoluzione di esercizi.	141
Lezione 31. Basi ortogonali e ortonormali. Componenti di un vettore rispetto a tali basi. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.	145
Lezione 32. Ortogonale di un sottospazio e sue proprietà. Esempi di calcolo di basi ortogonali e di ortogonali di sottospazi.	150
Lezione 33. Matrici ortogonali e loro proprietà. Proiezione ortogonale su un sottospazio.	155
Lezione 34. Struttura delle matrici ortogonali 2×2 . Esercizi su matrici ortogonali, basi ortogonali e ortonormali, applicazioni lineari e matrici di cambio di base.	160
Lezione 35. Forma canonica di un'applicazione lineare potendo scegliere basi a piacere in partenza ed arrivo (dipende solo dal rango).	165
Lezione 36. Introduzione motivazionale alle forme canoniche per applicazioni da uno spazio in sé (stessa base in partenza ed arrivo): matrici simili, autovalori, autovettori, autospazio, esempio di diagonalizzazione 2×2	170
Lezione 37. Prime proprietà delle matrici simili. Polinomio caratteristico ed autovalori. Molteplicità algebrica e geometrica. Disuguaglianza tra le molteplicità.	175
Lezione 38. Richiami su coefficienti di un polinomio vs somma e prodotto delle radici. Coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice. Autovalori relativi ad autovettori distinti sono linearmente indipendenti.	180
Lezione 39. Condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità sui reali o sui complessi. Condizione solo necessaria. Descrizione dei blocchi di Jordan e della forma canonica di Jordan sui reali e sui complessi.	185
Lezione 40. Applicazioni lineari simmetriche vs matrici simmetriche. Enunciato del teorema spettrale in termini di applicazioni ed in termini di matrici. Autovettori relativi ad autovalori distinti (di applicazioni simmetriche) sono ortogonali.	189
Lezione 41. Dimostrazione del teorema spettrale (via esistenza di almeno un autovalore reale ed invarianza dell'ortogonale di un sottospazio invariante). Riassunto su diagonalizzazione/Jordanizzazione.	193

Lezione 42. Esempi ed esercizi sulle forme canoniche.	198
Lezione 43. Introduzione alle forme quadratiche: definizione, matrice associata, forme (semi)definite positive/negative, segnatura come terna di numeri.	202
Lezione 44. Descrizione dei metodi per trovare la segnatura di una forma quadratica: segno degli autovalori, completamento dei quadrati, minori orlati di Sylvester (in vario ordine), Cartesio.	206
Lezione 45. Ricerca di sottospazi di dimensione opportuna su cui una forma quadratica è definita positiva/negativa (via completamento dei quadrati). Dimostrazione del legame tra segnatura e segno degli autovalori della matrice associata.	211
Lezione 46. Dimostrazione dell'esistenza di un polinomio che annulla una matrice. Polinomio minimo di una matrice. Enunciato del teorema di Hamilton-Cayley. Proprietà del polinomio minimo e suoi legami con i blocchi di Jordan.	216
Lezione 47. Forma di Jordan reale vs forma di Jordan complessa: come ottenere la prima dalla seconda e come ottenere la matrice di cambio di base che porta nella prima da quella che porta nella seconda.	220
Lezione 48. Definizione astratta di prodotto scalare. Matrice associata ad un prodotto scalare. Forma quadratica associata ad un prodotto scalare. Come varia la matrice associata ad un prodotto scalare quando si cambia base: matrici congruenti. . . .	225
Lezione 49. Algoritmo di Gram-Schmidt per un prodotto scalare qualunque definito positivo. Teorema di Sylvester (Sylvester's law of inertia). Esempio di passaggio alla forma alla Sylvester per un prodotto scalare non definito positivo.	230
Lezione 50. Esempio di funzioni ortogonali rispetto ad un prodotto scalare definito tramite integrale. Applicazioni simmetriche rispetto ad un prodotto scalare generale e relativo teorema spettrale. Esempio di calcolo dell'ortogonale di un sottospazio.	235
Lezione 51. Introduzione alla geometria affine. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini. Trasformazioni affini e loro composizioni. Traslazioni e omotetie, rispetto all'origine e rispetto ad un punto generico.	240
Lezione 52. Teorema di struttura delle isometrie nello spazio n-dimensionale. Rotazioni nel piano. Interpretazione dei blocchi di Jordan reali come composizione di una rotazione ed un'omotetia.	245
Lezione 53. Classificazione delle isometrie del piano sulla base del luogo dei punti fissi. Esempi di calcolo dell'immagine e della controimmagine di punti e rette rispetto ad un'isometria del piano.	250
Lezione 54. Esercizi sulle isometrie del piano.	255
Lezione 55. Introduzione alle isometrie dello spazio. Classificazione delle matrici 3×3 ortogonali. Simmetria rispetto ad un piano passante per l'origine.	259

Lezione 56. Matrici ortogonali che rappresentano (nello spazio) la simmetria rispetto ad un piano o la rotazione rispetto ad una retta (entrambi passanti per l'origine).	263
Lezione 57. Matrici che rappresentano una rotazione rispetto ad una retta seguita dalla simmetria rispetto al piano ortogonale alla retta stessa. Classificazione delle isometrie dello spazio sulla base del luogo dei punti fissi.	267
Lezione 58. Esercizi sulle isometrie dello spazio. Rette sghembe nello spazio: come trovare la distanza, i punti di minima distanza, ed un piano che contiene la prima e non interseca la seconda.	272
Lezione 59. Semplici esempi di studio di ellissi ed iperboli nel piano (non in forma canonica). Esponenziali e funzioni trascendenti di matrici.	277
Lezione 60. Cambi di basi ed algoritmo jpeg (o mp3).	282

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 01

Titolo nota

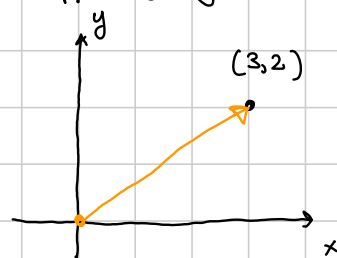
01/10/2014

- | | | |
|--|---|---------|
| <ul style="list-style-type: none"> ① Geometria Analitica in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ ② Sistemi lineari ③ Spazi vettoriali e applicazioni lineari ④ Prodotti scalari | } | MATRICI |
|--|---|---------|

GEOMETRIA DEL PIANO - VETTORI GEOMETRICI

$\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano. Gli elementi di $\mathbb{R}^2$ sono coppie (x, y) che penso in 2 modi:

- come punti del piano
- come "vettori"



Pensandoli come vettori, posso definire le operazioni

• SOMMA $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{w} = (c, d)$ $\vec{v} + \vec{w} = (a+c, b+d)$

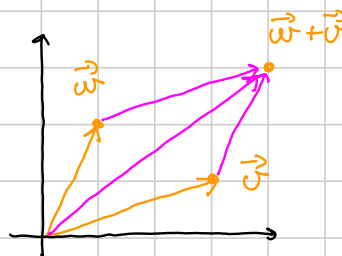
• PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO

$\vec{v} = (a, b)$ $\lambda \in \mathbb{R}$
↑ ↑
vettore numero

$$\lambda \vec{v} = (\lambda a, \lambda b)$$

Geometricamente, cosa vuol dire?

$\vec{v} = (3, 1)$ $\vec{w} = (1, 2)$
 $\vec{v} + \vec{w} = (4, 3)$

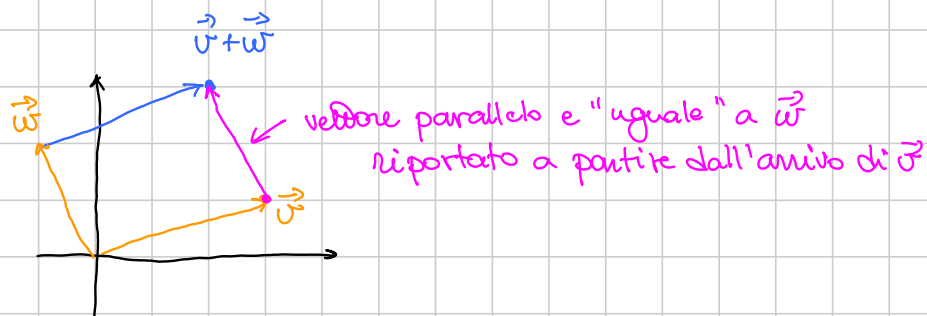


La somma corrisponde alla regola del parallelogrammo
 Moltiplicare per λ equivale a dilatare di un fattore λ (capovolgendo rispetto all'origine se $\lambda < 0$)

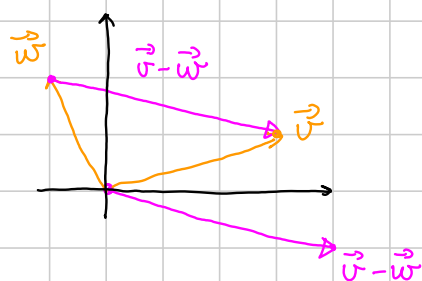
Interpretazione della somma: sommare $\vec{v}$ e $\vec{w}$ equivale a

→ fare il vettore $\vec{v}$

→ riportare il vettore $\vec{w}$ a partire dal p.to di arrivo di $\vec{v}$,



Allo stesso modo si interpreta la differenza $\vec{v} - \vec{w}$

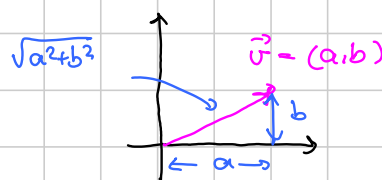


$\vec{v} - \vec{w}$ = vettore che aggiunto a $\vec{w}$ dà $\vec{v}$
 = vettore con p.to di applic. in $\vec{w}$ che arriva in $\vec{v}$

LUNGHEZZA DI UN VETTORE = NORMA DEL VETTORE

Si indica con $|\vec{v}|$ oppure $\|\vec{v}\|$. Se $\vec{v} = (a, b)$, allora

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI

Siano $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{w} = (c, d)$ due vettori.

Il prod. scalare si indica con una di queste notazioni:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{v}, \vec{w})$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

ed è definito come

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = ac + bd$$

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: un numero, cioè
UNO SCALARE

Prod. scalare vs norma

$$\vec{v} = (a, b)$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2 = |\vec{v}|^2$$

Distanza tra 2 vettori

$$\vec{v} = (a, b)$$

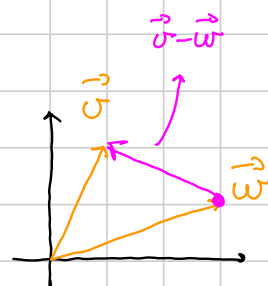
$$\vec{w} = (c, d)$$

$$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

↑
dist. tra 2 pti

Distanza = norma della differenza

$$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = |(a-c, b-d)| = |\vec{v} - \vec{w}|$$

Proprietà del prodotto scalare

$$\textcircled{1} \quad \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

[Dim. $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\vec{v} = (v_1, v_2)$ $\vec{w} = (w_1, w_2)$
 $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle &= (u_1 + v_1) \cdot w_1 + (u_2 + v_2) w_2 \\ &= u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 \end{aligned}$$

↕ sono uguali

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_2 \quad]$$

$$\textcircled{2} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\textcircled{3} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= |\vec{u}|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2\end{aligned}$$

In conclusione

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Analogamente

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 02

Titolo nota

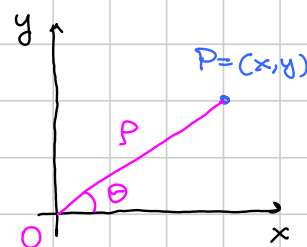
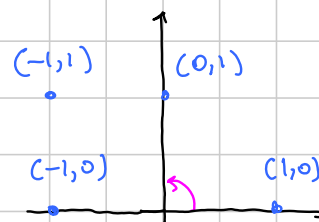
01/10/2014

COORDINATE POLARI NEL PIANO

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ x e y sono le coord. CARTESIANE

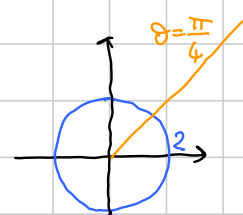
Le coordinate POLARI ρ e θ sono

- ρ = distanza di P dall'origine
(cioè la norma di (x, y))
- θ = angolo tra OP ed il semiasse positivo delle x
(inteso nel senso della trigonometria)

Esempi $(1, 0)$ $\rho = 1$ $\theta = 0$ $(0, 1)$ $\rho = 1$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(-1, 0)$ $\rho = 1$ $\theta = \pi$ $(0, -1)$ $\rho = 1$ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ oppure $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $(-1, 1)$ $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\theta = \frac{3\pi}{4}$ Esempio

Come sono fatti tutti i punti con $\rho = 2$?

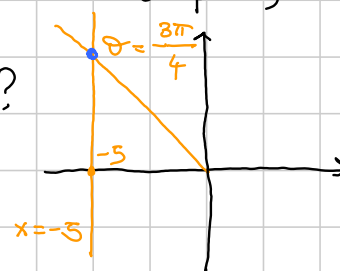
Circonf. di raggio 2



Come sono fatti tutti i pti con $\theta = \frac{\pi}{4}$?

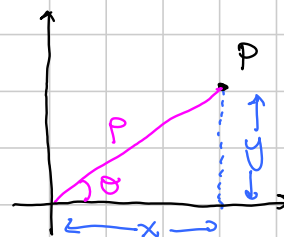
L'origine ha $\rho = 0$ e θ non definito (ma è l'unico p.to)

Come sono fatti i pti con $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $x = -5$?



FORMULE DI PASSAGGIO

- ① Se conosco p e θ , come trovo x e y ?
Precorso! Trigon. nei triangoli rettangoli



$$x = p \cos \theta \quad y = p \sin \theta$$

- ② Se conosco x e y , come trovo p e θ ?

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Per $\theta \leadsto$ guardare il disegno!

Dalle prime formule $\frac{y}{x} = \frac{p \sin \theta}{p \cos \theta} = \tan \theta$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Achtung! ① Ci sono dei guai se $x = 0$

- ② Conoscere $\tan \theta$ non vuol dire conoscere univocamente θ . Ad esempio, se $\tan \theta = 1$ posso avere $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{4}$.
Per stabilire quello giusto, guarda il disegno!

PRODOTTO SCALARE E COORDINATE POLARI

$$\vec{v}_1 = (x_1, y_1) \quad \vec{v}_2 = (x_2, y_2) \quad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Scrivo gli stessi vettori in coord. polari

$$\vec{v}_1 \leadsto p_1 \text{ e } \theta_1$$

$$\vec{v}_2 \leadsto p_2 \text{ e } \theta_2$$

Per le formule di passaggio

$$x_1 = p_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = p_2 \cos \theta_2$$

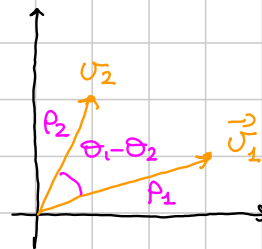
$$y_1 = p_1 \sin \theta_1$$

$$y_2 = p_2 \sin \theta_2$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \leftarrow \text{PRECORSO} \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(\text{ang. compreso})$$



Prodotto scalare = prodotto norme · coseno angolo compreso

In particolare

- $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ se e solo se uno dei 2 vettori è nullo, oppure l'angolo compreso è $\pm \frac{\pi}{2}$, cioè i vettori sono perpendicolari
- a parità di norme, il prodotto scalare è max quando ang. compreso $= 0$ ed è minimo quando è π

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$$

↓
valore assoluto del prodotto scalare

prodotto delle norme

o facendo i quadrati

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2$$

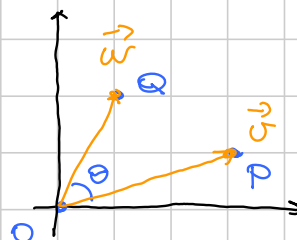
DISUGUAGLIANZA
DI CAUCHY-SCHWARZ

Altra interpretazione del prodotto scalare

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

" " "

$$QP^2 = OP^2 + OQ^2$$



Teorema di CARNOT (teo. del coseno) (precorso)

$$QP^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cdot \cos \theta$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = OP \cdot OQ \cdot \cos \theta$$

Altra interpretazione di C-S Considero il polinomio

$$|\vec{v} + t\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2 + 2t\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle \geq 0$$

perché è un $\square$

Precorso: per essere sempre ≥ 0 un polinomio di 2° grado deve avere

- $\Delta \leq 0$ $\Delta =$ discriminante
- coeff. di $t^2 \geq 0$ (gratis perché $|\vec{w}|^2 \geq 0$)

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle^2 - |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle^2 \leq |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} \quad \text{C.S. in altro modo.}$$

[Precorso: $at^2 + 2bt + c$ ha $\Delta = b^2 - ac$]
— 0 — 0 —

Esercizio 1 Trovare l'angolo tra $\vec{v} = (3, 1)$ e $\vec{w} = (1, 2)$

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2 Trovare un vettore di norma 1 che faccia un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il vettore $\vec{v} = (3, 1)$.
 Me ne aspetto 2 dalla figura

Chiamo il vettore incognito $\vec{w} = (a, b)$ e impongo

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (|\vec{w}| = 1)$$

$$\frac{1}{2} = \cos\theta = \frac{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3a + b}{\sqrt{10} \cdot 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ 3a + b &= \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}}$$

↑ risolvo e trovo a e b



ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 03

Titolo nota

01/10/2014

GEOMETRIA NEL PIANO

EQUAZIONE DELLA RETTA

Forma cartesiana

- esplicita $y = mx + n$ oppure $x = x_0$
- implicita $ax + by + c = 0$

Implicita

PRO: tutte le rette hanno equ. di quel tipo

CONTRO: • non tutte le terne a, b, c determinano una retta (serve $a^2 + b^2 > 0$)

• due terne a, b, c che sono una multipla dell'altra danno la stessa retta

Esplicita

PRO: • due rette sono la stessa se e solo se hanno lo stesso m e lo stesso n

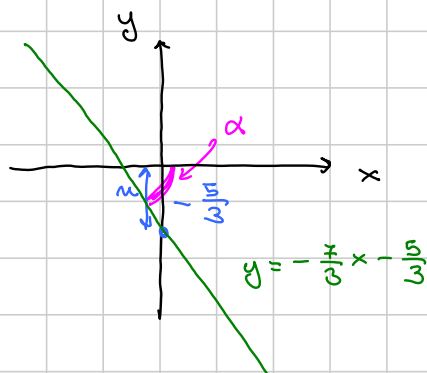
• m ed n hanno significato geom. evidente

CONTRO: due formule diverse in 2 casi diversi.

Esempi

$$7x + 3y + 5 = 0$$

$$y = \underbrace{-\frac{7}{3}}_m x - \underbrace{\frac{5}{3}}_n$$

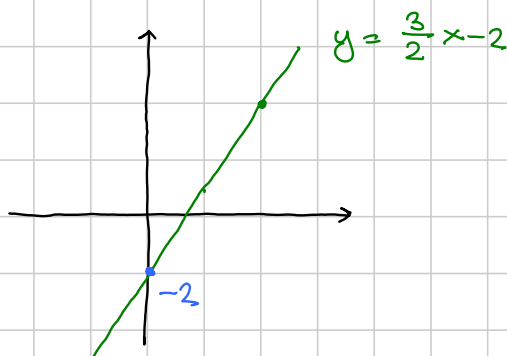


$$-\frac{7}{3} = \text{coeff. ang.} = \tan \alpha$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

$$y = \boxed{\frac{3}{2}}x - 2$$

2 quadretti a dx
3 quadretti in su



Forma parametrica

$$(a, b) + t(c, d) \text{ oppure } (a+tc, b+td)$$

Penso t come un parametro "temporale" e l'espressione descrive il percorso di un smino.

Esempio $(-1, -2) + t(3, 1)$

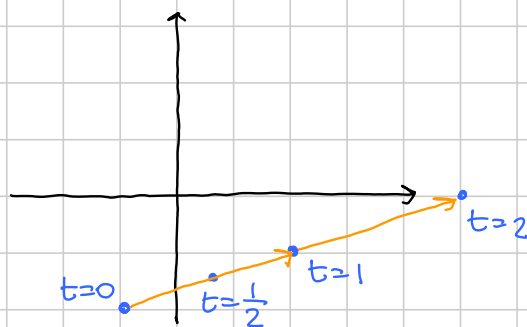
$$(-1+3t, -2+t)$$

$$t=0 \rightsquigarrow (-1, -2)$$

$$t=1 \rightsquigarrow (-1, -2) + (3, 1)$$

$$t=2 \rightsquigarrow (-1, -2) + 2(3, 1)$$

$$t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow (-1, -2) + \frac{1}{2}(3, 1)$$



Quando t varia in $\mathbb{R}$, l'smino percorre una retta.
Scrivta la retta nella forma generale

$$\vec{w} + t\vec{v}$$

↑
partenza!
posizione per $t=0$

↖
direzione di movimento

Così si ottiene una retta se e solo se $\vec{v} \neq (0, 0)$

Esercizio Scrivere in parametrica la retta passante per $(2, 5)$ e $(3, -1)$.

$$\begin{aligned} P + t(Q-P) &= (2, 5) + t(1, -6) \\ &= (2+t, 5-6t) \end{aligned}$$

↑
partenza



In alternativa posso partire da Q e andare verso P . Otteengo

$$Q + t(P-Q) = (3, -1) + t(-1, 6) \text{ anche } (3, -1) + t(1, -6) \text{ è ok!}$$

Posso liberarmi della frazione moltiplicando per 2

$$(1,1) + t(-2,3)$$

Fatto generale : se in cartesiana ho $ax+by+c=0$, allora un possibile vettore direzione è $(-b,a)$ come nell'esempio.

RETTE PER L'ORIGINE

Cartesiana : $ax+by=0$

Parametrica : $t(c,d)$

$(0,0)+t(c,d)$
punto dall'origine

Ora $ax+by$ è il prodotto scalare tra (a,b) e (x,y) .

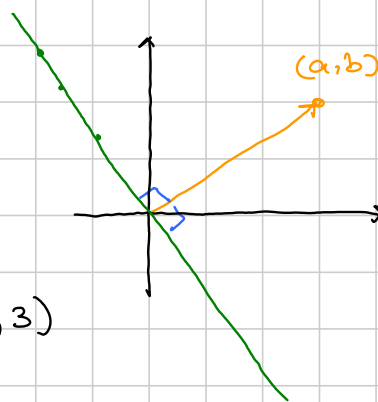
Quindi $(x,y) \in \text{retta} \Leftrightarrow \langle (a,b), (x,y) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow (x,y)$ è perpendicolare ad (a,b)

Quindi (a,b) è un vettore $\perp$ a tutti i vettori della retta

Esempio $3x+2y=0$

$(3,2) =$ vettore $\perp$ alla retta



In parametrica una possibilità è $t(-2,3)$

Fatto generale : la direzione in parametrica e il vettore (a,b) dei coeff. della cartesiana implicita sono vettori tra di loro ortogonali

Il fatto generale vale anche se la retta non passa per l'origine.

Esempio 1 $2x - 5y + 7 = 0$ passo in parametrica

$$y = 1 \leadsto x = -1 \leadsto (-1, 1) \text{ partenza}$$

La direzione è $(5, 2)$ $(-1, 1) + t(5, 2)$

Retta per $(1, 1)$ e $(3, -7)$ $(1, 1) + t(2, -8)$

Che angolo formano le 2 rette tra di loro?

È l'angolo tra le direzioni, quindi

$$\cos \theta = \frac{\langle (5, 2), (2, -8) \rangle}{|(5, 2)| \cdot |(2, -8)|} = \frac{10 - 16}{\sqrt{29} \sqrt{68}} = \frac{-6}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{68}}$$

Se metto il valore assoluto, quindi $\cos \theta = \frac{6}{\sqrt{} \cdot \sqrt{}}$
 ottengo il minore dei 4 angoli (= a 2 a 2)
 ↑
 quello acuto,

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 04

Titolo nota

03/10/2014

SISTEMI LINEARI

$$2x + 3y + 5z = 4$$

$$y + 2z = 5$$

$$6x + y - z = 3$$

Esempio di sistema
lineare

Un sistema lineare è un sistema in cui tutte le equazioni si presentano nella forma

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = b$$

combinazione lineare delle
incognite

 $x_1, \dots, x_n$ incognite $C_1, \dots, C_n$ sono numeri dati
detti coefficienti b si dice termine noto

Un sistema lineare si dice

- omogeneo se tutte le sue equazioni hanno termine noto $= 0$
- non omogeneo se almeno un'equazione del sistema ha $b \neq 0$.

oss. In generale un sistema può avere m equazioni in n incognite, anche con $m \neq n$.

Esempio 1
$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
 $x = -3y - 2$ sostituisco nella 2^a
 $-6y - 4 - y = 3$, $-7y = 7$, $y = -1$
 Torno nella 1^a: $x = 1$

Il sistema ha **soluzione unica** $(x, y) = (1, -1)$.

VERIFICA OK

Esempio 2
$$\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$
 $x = -3y - 4$
 $-6y - 8 + 6y = 5$ $-8 = 5$

Il sistema è impossibile, cioè non ci sono soluzioni.

Si poteva vedere da subito: a sx della 2^a equaz. c'è 2 volte la prima, ma il termine noto (5) non è 2 volte -4.

Esempio 3

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$y = 2x - 2$$

$$-4x + 4x - 4 = -4 \quad -4 = -4$$

Quindi la 2ª equ. è sempre soddisfatta purché lo sia la 1ª.

In questo caso il sistema ha infinita soluzioni, che sono tutte le coppie (x, y) con $y = 2x - 2$.

Volendo sono tutte le coppie del tipo $(t, 2t - 2)$ al variare del parametro libero t

$$t = 5 \rightsquigarrow (5, 8) \quad \text{verifica ok}$$

$$t = 3 \rightsquigarrow (3, 4) \quad \sim \quad \sim$$

— o — o —

↓
 $t(1, 2) + (0, -2)$
 eq. parametrica di una retta.

FATTO GENERALE

Dato un sistema lineare, ci sono tre possibilità

- ① il sistema ha soluzione unica
- ② il sistema non ha soluzioni
- ③ il sistema ha infinite soluzioni e l'insieme di tutte le soluzioni dipende da un certo numero di parametri liberi.

— o — o —

Esempio 4

$$3x + 2y + 4z = 5 \quad (1 \text{ equazione in } 3 \text{ incognite})$$

Ad esempio posso ricavare x :

$$x = \frac{1}{3}(5 - 2y - 4z) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z$$

Quindi posso scrivere la sol. generale nella forma

$$\left(\underbrace{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}s}_{\substack{\text{1} \\ \times}}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{y}}}{t}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{z}}}{s} \right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 0, 0 \right) + t \left(-\frac{2}{3}, 1, 0 \right) + s \left(-\frac{4}{3}, 0, 1 \right) \quad (s \text{ e } t \text{ sono i 2 parametri liberi})$$

Oss. Posso dare i valori liberi a 2 qualunque variabili e ricavare la restante di conseguenza.

ALGORITMO DI GAUSS (o GAUSS - JORDAN)

$$\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{ricopio}} \begin{cases} x+3y=4 \\ 2^a-2 \cdot 1^a \end{cases} \begin{cases} x+3y=4 \\ -7y=-3 \end{cases} \quad \text{In questo modo ho eliminato la } x \text{ dalla } 2^a$$

Da questa forma posso risolvere: $y = \frac{3}{7}$, $x = -3y + 4 = -\frac{9}{7} + 4 = \frac{19}{7}$

Il sistema ha soluz. unica $(x, y) = \left(\frac{19}{7}, \frac{3}{7}\right)$ VERIFICA OK

secondo esempio: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y=3 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{ricopio}} \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2^a-2 \cdot 1^a \\ 3^a-3 \cdot 1^a \end{cases} \begin{cases} x+y-z=2 \\ -3y+2z=-1 \\ -4y+5z=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -3y+2z=-1 \\ 7z=-2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ricavo } x} \begin{cases} x+y-\frac{4}{7}=-1 \\ -3y-\frac{4}{7}=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ricavo } y} \begin{cases} x+y-\frac{4}{7}=-1 \\ -3y-\frac{4}{7}=-1 \end{cases}$

Terzo esempio $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y=3 \end{cases} \xrightarrow{(2^a-2 \cdot 1^a)} \begin{cases} x+y-z=2 \\ -y+2z=-1 \end{cases}$

Sulla 2^a equazione ho un parametro libero, che posso fissare a piacere

$$z = t, \quad y = 2z + 1 = 2t + 1, \quad x = 2 - y + z = 2 - (2t + 1) + t = 1 - t$$

La soluzione generale è $(1-t, 2t+1, t) = (1, 1, 0) + t(-1, 2, 1)$

Verifica: 1^a eq. $(1-t) + (2t+1) - t = 2$ OK
2^a eq. $2(1-t) + (2t+1) = 3$ OK

— 0 — 0 —

L'algoritmo consiste nel trasformare il sistema in uno più semplice che abbia le stesse soluzioni,

Le operazioni consentite sono

- ① Scambiare tra di loro 2 righe
- ② Sostituire una riga R_j con $a R_j + b R_i$ purché
 - algoritmo ultraortodosso : $a = 1$
 - algoritmo standard : $a \neq 0$

Esempio Se ho
$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 5x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

Ultraortodosso : $\boxed{2}^a - \frac{5}{2} \cdot 1^a$

Standard : $\boxed{2} \cdot 2^a - 5 \cdot 1^a$

Oss. le operazioni conducono ad un sistema con le stesse soluzioni.

$$[\text{Dim.} \quad \begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} R_i = 0 \\ a R_j + b R_i = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se è vero il 1º, è vero} \\ \text{il 2º} \end{array}]$$

$$\begin{cases} R_i = 0 \\ \boxed{a R_j + b R_i} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases}$$

↓ se questo è nullo e $R_i = 0$, allora anche $a R_j = 0$,
ma essendo $a \neq 0$ posso concludere che $R_j = 0$

— 0 — 0 —

L'obiettivo finale dell'algoritmo è arrivare ad un sistema A SCALA, cioè un sistema in cui ogni equazione ha una incognita (almeno) in meno della precedente.

Questi sistemi si risolvono "dal basso",
— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 05

Titolo nota

03/10/2014

Matrice associata ad un sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Matrice dei coeff.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Posso operare alla Gauss direttamente sui soli coefficienti

Matrice completa del sistema

- scambiare righe
- $(R_i, R_j) \rightsquigarrow (R_i, aR_j + bR_i)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Da qui se torno in forma di sistema posso risolvere

$$\begin{cases} 1x - 2y + z = 1 \\ 3y - 2z = -1 \\ 7z = 11 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= 2y - z + 1 = \frac{10}{7} - \frac{11}{7} + 1 = - \\ 3y &= 2z - 1 = \frac{22}{7} - 1 = \frac{15}{7} \quad y = \frac{5}{7} \\ \rightarrow z &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

Siamo arrivati ad una MATRICE A SCALA, in cui tutte le righe sono del tipo

PIVOT

$$\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{\text{zeri iniziali, che nella prima riga possono non esserci}} \quad \boxed{*} \quad \boxed{* \ * \ * \ *}$$

altro roba, $\neq 0$ diversa da 0

elemento diverso da 0

In ogni riga c'è almeno uno zero iniziale in più rispetto alla riga precedente

Una volta ridotto a scala, un sistema risulta

- IMPOSSIBILE se c'è una riga con tutto 0, tranne il termine più a destra $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ \begin{matrix} \neq 0 \\ \text{(*)} \end{matrix}$

- con SOLUZIONE UNICA se su tutte le colonne della matrice dei coefficienti c'è un PIVOT.

- con INFINITE SOLUZIONI se ci sono colonne nella matrice dei coeff. che non contengono PIVOT. In tal caso l'insieme delle solus. dipende da un numero di parametri liberi uguale al numero di colonne senza pivot.

Esempio 1
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Seconda colonna senza pivot, quindi il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 4z = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} z = \frac{7}{4} \\ y = t \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2y - 3z + 4 = 2t - \frac{21}{4} + 4 \\ = 2t - \frac{5}{4} \end{matrix}$$

Soluzione generale: $(x, y, z) = \left(2t - \frac{5}{4}, t, \frac{7}{4} \right)$

il parametro libero sta nella variabile corrisp. alla colonna senza pivot

Esempio 2
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} 3x + 2z + 5w &= -1 \\ 3z &= 4 \end{aligned}$$

2 colonne senza pivot $\Rightarrow$ 2 parametri liberi $\Rightarrow$ posso metterli su y e w

$$\begin{aligned} w = t, \quad z = \frac{4}{3}, \quad y = s, \quad 3x &= -2z - 5w - 1 = -\frac{8}{3} - 5t - 1 \\ &= -\frac{11}{3} - 5t \end{aligned}$$

La soluzione generale è

$$(x, y, z, w) = \left(-\frac{11}{9} - \frac{5}{3}t, s, \frac{4}{3}, t\right)$$

$$= \left(-\frac{11}{9}, 0, \frac{4}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{5}{3}, 0, 0, 1\right) + s(0, 1, 0, 0)$$

Esempio 3

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ 4x + 4y + 3z = 18 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 18 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leadsto x + y - z = 1 \\ \leadsto 2z = 4 \end{array}$$

Due pivot; sol. infinite con parametro libero sulla y

$$y = t, \quad z = 2, \quad x = -y + z + 1 = -t + 3$$

Solut. generale: $(x, y, z) = (-t + 3, t, 2) = \boxed{(3, 0, 2)} + t \boxed{(-1, 1, 0)}$

— o — o —

↑
Deve risolvere
il sistema

↑
sostituito nelle
equ. del sistema
fa venire 0
su tutte le
righe.

Variante di JORDAN all'algoritmo

Una volta ridotta a scala la matrice, si può continuare facendo venire 0 sopra i pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

A questo p.to ho sol. unica (ogni colonna ha 1 pivot)

Continuazione alla JORDAN per mettere 0 sopra i PIVOT

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se qui non veniva 0, potevo lavorare con la 2ª per farlo venire

Alla fine si trova una matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Forma alla jordan, da cui si trovano ancora più in fretta le soluzioni

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 06

Titolo nota

08/10/2014

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO ($\mathbb{R}^3$ o più in gener. $\mathbb{R}^n$)Spazio $\mathbb{R}^n$: p.ti (o vettori) sono n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Operazioni:

- somma di vettori
- prodotto di un vettore per un numero
- prodotto scalare tra 2 vettori
- norma di un vettore
- distanza tra vettori (p.ti)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

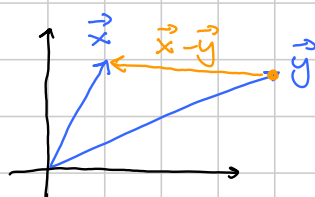
Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

$$\text{Prodotto scalare} = \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{INPUT: 2 vettori}} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}_{\text{OUTPUT: numero}}$$

$$\begin{aligned} \text{Norma di } \vec{x} &= \text{"lunghezza di } \vec{x} \text{"} = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ &= \|\vec{y} - \vec{x}\| \end{aligned}$$

↑ teorema di Pitagora
in $\mathbb{R}^n$



Significato geometrico del prodotto scalare

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$$

↑
angolo compreso tra i vettori

I vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono perpendicolari $\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

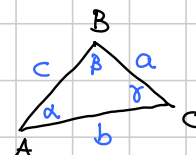
Esempio In $\mathbb{R}^3$ il triangolo con vertici in $\underbrace{(0,0,0)}_A$, $\underbrace{(1,2,3)}_B$, $\underbrace{(-1,3,5)}_C$

Lunghezze dei lati: $AB = \|B-A\| = \|(1,2,3)\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$$BC = \|C-B\| = \|(-2,1,2)\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$AC = \|C-A\| = \|(-1,3,5)\| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

Area del triangolo: uso formula trigonometrica



$$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta$$

Nel nostro caso: $\text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$

↑ ↑
b sin b sin

Mi procuro $\cos \alpha$

$$\begin{aligned} \langle (1,2,3), (-1,3,5) \rangle &= AB \cdot AC \cdot \cos \alpha \\ &= -1 + 6 + 15 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Quindi } \cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = \frac{20}{\sqrt{2} \sqrt{7} \sqrt{5} \sqrt{7}} = \frac{20}{7\sqrt{10}}$$

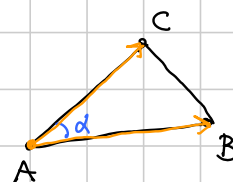
$$\text{Ora } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{400}{49 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{In conclusione area} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{7} \sqrt{5} \sqrt{7} \frac{3}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $A = (1, 0, -1)$ $B = (2, 1, 1)$ $C = (3, 0, 1)$

Come calcolo il coseno dell'angolo in A?



$$\langle B-A, C-A \rangle = \|B-A\| \cdot \|C-A\| \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \langle (1, 1, 2), (2, 0, 2) \rangle &= \|(1, 1, 2)\| \cdot \|(2, 0, 2)\| \cdot \cos \alpha \\ 2+0+4 &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{6} \sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{2} \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Che cosa rappresenta in $\mathbb{R}^3$ l'insieme dei p.ti $t(1, 2, 5)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$?

È la retta che passa per l'origine e va nella direzione $(1, 2, 5)$

In generale, l'equazione parametrica di una retta in $\mathbb{R}^3$ è del tipo

$$\vec{P}_0 + t \vec{v}$$

$\uparrow$ vettore che indica la posizione al tempo $t=0$
 $\nwarrow$ vettore "velocità" che indica direzione e verso

Esempi $(2, 5, 7) + t(1, 3, -4)$

MUTUA POSIZIONE DI 2 RETTE

In $\mathbb{R}^2$ due rette possono essere

- coincidenti, cioè sono la stessa retta ∞ intersezioni
- parallele ma non coincidenti Nessuna intersezione
- incidenti (si intersecano) 1 intersezione

Come me ne accorgo dalle equazioni?

- ① Nella forma $ax+by+c=0$ e $\hat{a}x+\hat{b}y+\hat{c}=0$ sono
- coincidenti se (a,b,c) è multiplo di $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$
 - parallele ma non coincidenti se (a,b) è multiplo di $(\hat{a},\hat{b})$ ma non la terza come sopra
 - incidenti se (a,b) non è multiplo di $(\hat{a},\hat{b})$

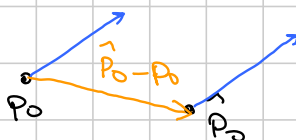
Esempio

$3x-2y+5=0$	$6x-4y+10=0$	coincidente
	$-3x+2y+7=0$	parallela
		$(3,-2) \quad (-3,2)$
	$3x+2y+5=0$	incidenti

Se sono incidenti trovo l'intersezione risolvendo il sistema

- ② In forma parametrica $P_0+t\vec{v}$ e $\hat{P}_0+t\hat{\vec{v}}$ sono

- incidenti se $\vec{v}$ e $\hat{\vec{v}}$ non sono multipli l'uno dell'altro
- parallele se $\vec{v}$ è multiplo di $\hat{\vec{v}}$ e $\vec{v}$ non è multiplo di $\hat{P}_0-P_0$
- coincidenti se $\vec{v}$ è multiplo di $\hat{\vec{v}}$ e multiplo anche di $\hat{P}_0-P_0$



Esempi

$\underbrace{(1,2)}_{P_0} + t(3,4)$	$(1,7) + t(3,5)$	incidenti
	$\underbrace{(2,5)}_{\hat{P}_0} + t(6,8)$	↑ velocità multipla, quindi // o coinc.

$\hat{P}_0 - P_0 = (1,3)$ non è multiplo della velocità, quindi sono parallele.

In $\mathbb{R}^3$ due rette possono essere

- coincidenti (stessa retta)
- parallele (nessuna intersezione, ma nello stesso piano)
- incidenti (una intersezione)
- sghembe (nessuna intersezione, ma non nello stesso piano)



Come riconosco ?

vettori velocità multipli tra di loro → parallele (0 inters.)
→ coincidenti (∞ inters.)

vettori velocità non multipli tra di loro → incidenti (1 inters.)
→ sghembe (0 inters.)

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 07

Titolo nota

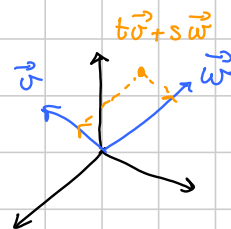
08/10/2014

EQUAZIONI DI PIANI NELLO SPAZIO

In $\mathbb{R}^3$ prendiamo 2 vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
I vettori del tipo

$$t\vec{v} + s\vec{w}$$

combinazione lineare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$



quando i parametri t ed s variano in $\mathbb{R}$ descrivono tutto il piano passante per l'origine e per $\vec{v}$ e $\vec{w}$

I vettori del tipo $\vec{p}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$ rappresentano il piano che passa per il punto $\vec{p}_0$ ed è parallelo al piano precedente.

Equazione parametrica di un piano

$$\vec{p}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$$

Equazione cartesiana di un piano

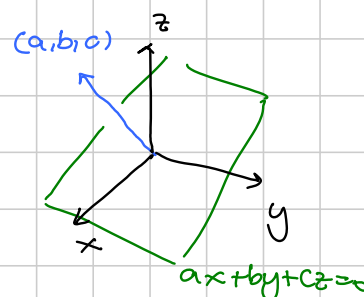
$$ax + by + cz + d = 0$$

Il piano passa per l'origine se e solo se $d = 0$. In tal caso l'eq. diventa

$$ax + by + cz = 0$$

che possiamo riscrivere come

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = 0.$$



Quindi il piano è costituito da tutti i vettori perpendicolari al vettore (a, b, c) .

Quando $d \neq 0$, semplicemente sto spostando il piano // a se stesso.

Retta in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ cartesiana $ax+by+c=0$
 $\rightarrow$ parametrica $P_0 + t \cdot v$

Piano in $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ cartesiana $ax+by+cz+d=0$
 $\rightarrow$ parametrica $P_0 + t \cdot u + s \cdot w$

Retta in $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ parametrica $P_0 + t \cdot v$
 $\rightarrow$ cartesiana: scrivere la retta come intersezione di due piani

Esercizio 1 Scrivere la retta passante per $\underbrace{(1,0,2)}_A$ e $\underbrace{(3,-1,4)}_B$

Risposta: $A + t(B-A) = \underbrace{(1,0,2)}_{\text{start}} + t \underbrace{(2,-1,2)}_{\text{velocità}}$

$B + t(A-B)$ andava bene uguale

$B + t(B-A)$ " " "

Esercizio 2 Scrivere il piano passante per $\underbrace{(0,1,1)}_C$, $\underbrace{(2,0,3)}_D$, $\underbrace{(4,1,0)}_E$

1° modo Scrivo l'eq. parametrica $C + t(D-C) + s(E-C)$

$t=s=0 \leadsto C$

$t=1, s=0 \leadsto D \quad (0,1,1) + t(2,-1,2) + s(4,0,-1)$

$t=0, s=1 \leadsto E$

2° modo Se voglio l'eq. cartesiana la cerco del tipo $ax+by+cz+d=0$ con coeff. a, b, c, d incogniti e impongo di passare per i 3 p.ti

$b+c+d=0$ (passare per C)

$2a+3c+d=0$ (" " D)

$4a+b+d=0$ (" " E)

Risolvere il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

La colonna della d è senza pivot, quindi d è libero e le altre 3 variabili si ricavano di conseguenza

$$d \text{ a piacere, } -7c - 2d = 0, \quad c = -\frac{2}{7}d$$

$$b + c + d = 0, \quad b = -c - d = \frac{2}{7}d - d = -\frac{5}{7}d$$

$$2a + 3c + d = 0 \quad a = -\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}d = \frac{6}{14}d - \frac{1}{2}d = -\frac{1}{14}d$$

$$\text{La sol. gen. del sistema è } \left(-\frac{1}{14}d, -\frac{5}{7}d, -\frac{2}{7}d, d \right)$$

Come d scelgo $d = 14$ e ottengo $(-1, -10, -4, 14)$ cioè l'eq.

$$-x - 10y - 4z + 14 = 0 \quad \text{o volendo} \quad \boxed{x + 10y + 4z - 14 = 0}$$

VERIFICO C, D, E: OK

Oss. È giusto che una variabile resti libera !!

3° modo Si può ottenere la cartesiana dalla parametrica mediante la FORMULA MISTERIOSA

Parto dalla param. $(0, 1, 1) + t(2, -1, 2) + s(4, 0, -1)$.

Il vettore (a, b, c) dei primi coeff. della cartesiana deve essere $\perp$ ai 2 vettori $(2, -1, 2)$ e $(4, 0, -1)$. Come posso trovare un vettore $\perp$ a 2 vettori dati? Posso imporre i 2 prod. scalari $= 0$ e fare il sistema, oppure in $\mathbb{R}^3$ c'è una formula

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 0 &= \textcircled{1}^a \\ (2) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 &= -10 \rightsquigarrow \text{cambio segno} \rightsquigarrow \textcircled{10}^b \\ 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 &= \textcircled{4}^c \end{aligned}$$

In generale se ho $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

allora un vettore $\perp$ a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è dato da

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)}$$

Vettore $\perp$ a $\vec{v}$ e $\vec{w}$: provare a fare il prodotto scalare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e vedere che viene 0.

Finale: una volta trovati a, b, c , trovo d imponendo di passare per uno dei 3 p.ti dati

$$x + 10y + 4z + d = 0 \quad \text{impongo di passare per } C = (0, 1, 1) \\ \text{e ottengo } d = -14,$$

Esercizio 3 $A = (-1, 0, 0)$ $B = (2, 2, -3)$ $C = (1, 1, 1)$

Scrivere eq. cartesiana del piano passante per C e $\perp$ alla retta AB

Scrivo la retta AB : $A + t(B-A) = (-1, 0, 0) + t(3, 2, -3)$

Il generico piano $\perp$ alla retta deve essere $\perp$ al vettore $(3, 2, -3)$

quindi deve essere della forma

$$3x + 2y - 3z + d = 0$$

Ora trovo d imponendo il passaggio per C : $d = -2$, quindi il piano è $\boxed{3x + 2y - 3z - 2 = 0}$.

Esercizio 4 Trovare la retta passante per $(2, 2, 0)$ e perpendicolare al piano dell'esercizio 2.

Prendo la cartesiane del piano: $x + 10y + 4z - 14 = 0$ e uso (a, b, c) come direzione della retta.

Quindi la retta è

$$(2, 2, 0) + t (1, 10, 4).$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 08

Titolo nota

08/10/2014

Come interseco due rette in $\mathbb{R}^2$?

① Se ho le 2 equazioni cartesiane, basta metterle a sistema

② Se ne ho una in cartesiana e una in parametrica

→ o le posso entrambe in cartesiana

→ o sostituisco la param. nella cartesiana

Esempio $2x - y + 7 = 0$ $(1, 2) + t(-1, 3)$ $(1-t, 2+3t)$

sostituisco nella cartesiana

$$2(1-t) - (2+3t) + 7 = 0, \quad 2 - 2t - 2 - 3t + 7 = 0$$

$$5t = 7 \quad t = \frac{7}{5}$$

Quindi il p.to di intersezione è $(1 - \frac{7}{5}, 2 + \frac{21}{5}) = (-\frac{2}{5}, \frac{31}{5})$

③ Se invece sono entrambe in parametrica, e non voglio andare in cartesiana, cosa faccio?

 $(1, 2) + t(-1, 3)$ $(1-t, 2+3t)$ $(-1, 0) + t(1, 4)$ $(-1+t, 4t)$

Se facessi il sistema

$$\begin{cases} 1-t = -1+t \\ 2+3t = 4t \end{cases}$$

starei cercando un valore di t per cui i 2 punti si trovano nello stesso p.to.

Più in generale posso imporre il sistema



$$\begin{cases} 1-t = -1+s \\ 2+3t = 4s \end{cases}$$

sto cercando se esiste un p.to del piano in cui il 1° $\vec{r}$ passa al tempo t ed il secondo passa al tempo s .

Esempio Capire la mutua posizione dei piani

$$x+y+2z=3 \quad \text{e il piano passante per } (1,1,0), (0,1,0), (2,2,1)$$

→ 2° piano in parametrica $(1,1,0) + t(-1,0,0) + s(1,1,1)$

→ calcolo (a,b,c) con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0, 1, -1) = (a,b,c) \quad \text{quindi } y-z+d=0$$

→ calcolo d imponendo il passaggio per A : $d = -1$

$$\text{cartesiana: } y-z-1=0$$

→ metto a sistema le 2 cartesiane $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-z=1 \end{cases}$ che è già a scala

z libera $z=t$

$$y = z+1 = t+1$$

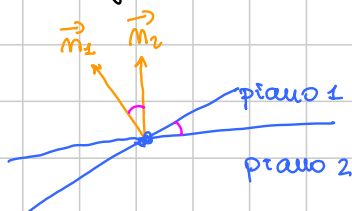
$$x = 3 - y - 2z = 3 - (t+1) - 2t = 2-3t$$

$$(x, y, z) = (2-3t, t+1, t)$$

$$= (2, 1, 0) + t(-3, 1, 1) \leftarrow \text{parametrica della retta intersezione}$$

Ora che so che si intersecano, come determino l'angolo tra i 2 piani?

Fatto fondamentale: L'angolo tra 2 piani è uguale all'angolo tra i vettori perpendicolari, cioè tra gli (a,b,c) della cartesiana.



Nell'esempio $(1, 1, 2)$ $(0, 1, -1)$

$$\langle (1, 1, 2), (0, 1, -1) \rangle = \|(1, 1, 2)\| \cdot \|(0, 1, -1)\| \cdot \cos \theta$$

$$-1 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \left| \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

↑
selezione tra i 2 angoli
quello tra 0° e 90°

Come interseco una retta ed un piano in $\mathbb{R}^3$?

- L'intersezione può venire:
- un p.to (incidenti)
 - una retta (la retta è contenuta nel piano)
 - nulla (la retta è // al piano)

La retta ce l'ho in parametrica

Il piano lo porto in cartesiana.

A questo p.to sostituisco la retta nella cartesiana

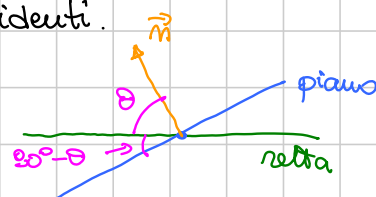
Esempio $2x + 3y - z = 5$ $(1, 1, 0) + t(2, 1, 1)$
 $(1+2t, 1+t, t)$

$$2(1+2t) + 3(1+t) - t = 5$$

$$2 + 4t + 3 + 3t - t = 5 \quad \leadsto t = 0$$

L'intersezione è $(1, 1, 0)$, quindi sono incidenti.

Per l'angolo?



L'angolo che voglio è il complementare dell'angolo tra la retta e il vettore $\perp$ al piano

$$(2, 1, 1) \quad (2, 3, -1)$$

$$\cos \theta = \left| \frac{4+3-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} \right| \quad \text{e alla fine la risposta è } 90^\circ - \theta$$

Come calcolo la distanza di un p.to da un piano? $P = (x_0, y_0, z_0)$

→ scrivo l'eq. cartesiana del piano $ax + by + cz + d = 0$

→ scrivo l'eq. della retta passante per P e $\perp$ al piano

$$(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

→ interseco la retta appena trovata con il piano come visto sopra.

Otengo un p.to H che è la proiezione di P sul piano

→ Calcolo la distanza tra P e H, cioè $\|P-H\|$ o $\|H-P\|$. Si ottiene

$$\text{dist}(P, \text{piano}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Controllare che venga calcolando H

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 09

Titolo nota

10/10/2014

MATRICI Una matrice è una tabella rettangolare di numeri.
 Si indica con $M_{m \times n}$ l'insieme delle matrici con

- m righe
- n colonne

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$$

Di solito le matrici si indicano con lettere maiuscole.

Gli elementi si indicano con lettere minuscole con 2 indici

$a_{i,j}$ = elemento che si trova nella riga i e colonna j
 (si intende $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$)

Nell'esempio $a_{2,2} = 5$, $a_{1,3} = \sqrt{3}$

OPERAZIONI TRA MATRICI

Somma Due matrici $m \times n$ (stesse dim. per entrambe) le posso sommare "termine a termine".

Se $A = \{a_{i,j}\}$ e $B = \{b_{i,j}\}$, allora

$$C = A + B \quad \text{ha}$$

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Prodotto di una matrice per un numero. Se $A = \{a_{i,j}\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\lambda A = \{ \lambda a_{i,j} \}.$$

Prodotto tra 2 matrici Sia A una matrice $M_{m \times k}$

Sia B una matrice $M_{k \times n}$

(il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda).

Allora posso definire il prodotto $C = A \cdot B$ nel seguente modo

- C è una matrice $M_{m \times n}$ (tante righe come A, tante col. come B)
- l'elemento c_{ij} è dato dalla formula

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

devono essere uguali

Il prodotto sarà una matrice 3×2

$$\begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

Anzi potuto calcolare $B \cdot A$? $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ no!

Oss. Se posso fare $A \cdot B$, non è detto che possa fare $B \cdot A$.

Anche $A \cdot A$ non lo posso sempre fare, anzi lo posso fare se e solo se A è quadrata ($m = n$)

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Oss. Anche quando posso fare $A \cdot B$ e $B \cdot A$, non è detto che vengano uguali. Ovviamente può succedere, ma non è obbligatorio. Il prodotto di matrici NON è commutativo.

Fatto importante Il prodotto di matrici è ASSOCIATIVO, cioè

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{purché le dimensioni siano compatibili}$$

$A \in M_{m \times k}$, $B \in M_{k \times r}$, $C \in M_{r \times n}$ così il prodotto

$$A \cdot B \cdot C \in M_{m \times n}$$

Casi particolari di matrici

- Se $m=1$ ho i **VETTORI RIGA** di dim. n $(\begin{matrix} * & * & * & \dots & * \end{matrix})$
- Se $n=1$ ho i **VETTORI COLONNA** di dim. m $\left(\begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \right)$
- Se $m=n=1$ la matrice si riduce ad un singolo numero $(*)$

Matrici speciali

- La matrice nulla è quella con tutti 0 e se la sommo ad una matrice qualunque non cambia nulla.
- Si dice **MATRICE IDENTICA** $n \times n$ la matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n=2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n=3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fatto generale Se I è la matrice identica $n \times n$ e A è una qualunque altra matrice $n \times n$, allora
 $A \cdot I = I \cdot A = A$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $B \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $I \cdot B = \text{NO}$
 — 0 — 0 —

Cosa succede se moltiplico una matrice per un vettore colonna?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 5x + 7y + 9z \\ y + 4z \end{pmatrix}$ ← vettore colonna (matrice 3×1)
 matrice 3×3 vett. col. lungo 3

Osservazione fondamentale La parte a dx di un sistema lineare si può sempre scrivere come prodotto tra la matrice A dei coeff. ed il vettore colonna delle incognite.
 Analogamente, la parte a dx del sistema si può pensare come vettore colonna.

Quindi un sistema lineare si può sempre scrivere come

$Ax = b$ ← vettore colonna ($m \times 1$) dei termini noti
 matrice $m \times n$ ← numero di equazioni
 numero di incognite
 vettore colonna delle n incognite ($n \times 1$)

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5w = 3 \\ x + y - z + w = 1 \\ x + z - w = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Risolvere il sistema vuol dire trovare tutti i vettori colonna x che moltip. alla matrice A (Ax) danno il vettore B .

— o — o —

Def. Data $A \in M_{m \times n}$, si dice trasposta di A la matrice A^t ottenuta scambiando righe e colonne (quindi $A^t \in M_{n \times m}$)

Esempio Se A è quella di sopra, allora

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La trasposta dell'identità rimane lei stessa.

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 10

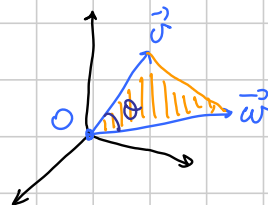
Titolo nota

10/10/2014

Formula misteriosa e area del triangolo

Come calcolo l'area del triangolo con vertici nell'origine e in due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$?

1° modo Area = $\frac{1}{2} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \theta$
Per calcolare θ uso la formula



$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \quad \text{da cui}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2}} = \frac{1}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}$$

Sostituendo nella formula per l'area trovo

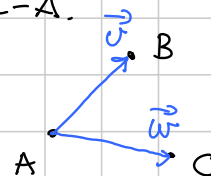
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}$$

Funzione in dimensione qualunque

In termini di componenti, se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2}$$

Oss. Se i vertici del triangolo sono 3 p.ti generici A, B, C faccio lo stesso discorso con $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$, $\vec{w} = \vec{C} - \vec{A}$.
(Oppure volendo con $\vec{A} - \vec{B}$ e $\vec{C} - \vec{B}$)



2° modo Partendo da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ costruisco con la formula misteriosa il vettore $\vec{z} \perp$ a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, cioè

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1) = \vec{z}$$

Ora miracolosamente risulta

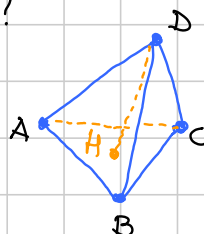
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|\vec{z}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2}$$

Vale in $\mathbb{R}^3$

Per dimostrarla, basta fare i conti e vedere che viene la stessa cosa del caso precedente! (Provare!)

Come calcolo il volume del tetraedro dati i 4 vertici?

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \underbrace{\text{area base}}_{\substack{\uparrow \\ \text{area di un} \\ \text{triangolo} \\ \text{(diciamo ABC)}}} \cdot \underbrace{\text{altezza}}_{\substack{\uparrow \\ \text{distanza di D} \\ \text{dal piano ABC} \\ \text{(dato il piano in} \\ \text{cartesiano, poi c'è} \\ \text{la formula)}}}$$



Se dovessi calcolare il p.to H?

Interseco il piano per A, B, C con la retta $\perp$ al piano e passante per D

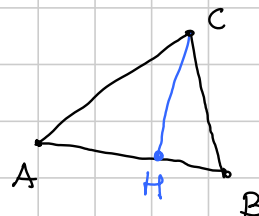
Come calcolo il piede dell'altezza di un triangolo?

Se siamo in $\mathbb{R}^2$, è percorso:

→ scrivo la retta AB

→ scrivo la retta per C e $\perp$ alla retta AB

→ calcolo l'intersezione con il sistema



Se siamo in $\mathbb{R}^3$, ci sono due strategie.

$$A = (2, 0, 3)$$

$$B = (1, 1, 0)$$

$$C = (-1, 2, 1)$$

1° modo

→ scrivo la retta AB

→ scrivo il piano per C e $\perp$ alla retta AB

→ interseco retta e piano

Retta AB : $(2, 0, 3) + t(-1, 1, -3)$ $A + t(B-A)$

Piano $\perp$ alla retta $-x + y - 3z = d$

Lo faccio passare per C : $1 + 2 - 3 = d \leadsto d = 0$

$$-x + y - 3z = 0$$

Interseco retta e piano : $(2-t, t, 3-3t)$

$$-(2-t) + t - 3(3-3t) = 0$$

$$-2 + t + t - 9 + 9t = 0 \leadsto 11t = 11 \leadsto t = 1$$

Quindi $H = (1, 1, 0)$

2° modo $\rightarrow$ il p.to H è del tipo $(2-t, t, 3-3t)$

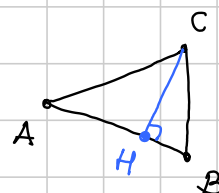
$\rightarrow$ impongo $CH \perp AB$, cioè

$$\langle C-H, B-A \rangle = 0$$

$$B-A = (-1, 1, -3)$$

$$C-H = (-1, 2, 1) - (2-t, t, 3-3t) = (-3+t, 2-t, -2+3t)$$

$$\langle B-A, C-H \rangle = \underbrace{3-t}_{-0} + \underbrace{2-t}_{-0} + \underbrace{6-9t}_{-0} = 0 \text{ cioè } 11t = 11 \leadsto t = 1.$$



Come passo dalla cartesiana alla parametrica per un piano in $\mathbb{R}^3$

$$x - 2y + 4z = 5 \quad \text{devo scriverlo come} \quad \vec{P}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$$

Osservo che : $\rightarrow \vec{P}_0$ è un p.to qualunque del piano, ad esempio

$$\vec{P}_0 = (1, 0, 1)$$

$\rightarrow \vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due vettori perpendicolari ad (a, b, c) .

Quindi basta trovare 2 vettori $\perp$ ad $(1, -2, 4)$.

Questo si riduce a risolvere

$$x - 2y + 4z = 0 \quad \text{Pongo } y=0, z=1 \leadsto x=-4 \quad (-4, 0, 1)$$

$$\text{Pongo } y=1, z=0 \leadsto x=2 \quad (2, 1, 0)$$

Una possibile parametrica è

$$(1, 0, 1) + t(-4, 0, 1) + s(2, 1, 0)$$

provare a fare la
cartesiana a partire da qui

Equazione della sfera in $\mathbb{R}^3$ Dato un centro P_0 ed un raggio r , la sfera con centro in P_0 e raggio r sono tutti i pti dello spazio la cui distanza da P_0 è r :
indicato con $\vec{x}$ il generico pto, l'eq. diventa

$$\|\vec{x} - \vec{P}_0\|^2 = r^2$$

Passando in componenti $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $\vec{x} = (x, y, z)$
diventa

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

Sistemi lineari: caso $m \times n$ (Numero equazioni = numero incognite)

Prendo la matrice completa e la porto a scala. Possono succedere solo 2 cose

- ① Ogni colonna contiene un PIVOT e questi compaiono sulla diagonale e ogni riga ha esattamente uno zero in più della precedente.

In questo caso c'è soluzione unica qualunque cosa ci sia nella colonna dei termini noti



- ② Se c'è una colonna in cui manca il PIVOT, in fondo c'è almeno una riga che ha tutti zero sulla parte coeff.

Può esserci ∞ sol. o nessuna sol. a seconda del termine noto nelle righe finali.



ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 11

Titolo nota

15/10/2014

Strutture algebriche astratte

GRUPPO

GRUPPO COMMUTATIVO

ANELLO

CORPO

CAMPO

MODULO

SPAZIO VETTORIALE

Def. (campo) Un campo è un insieme K dove sono definite due operazioni (somma e prodotto) che verificano le seguenti proprietà:

$$(S1) \quad a + b = b + a \quad \forall \dots$$

(commutativa)

$$(S2) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

(associativa)

$$(S3) \quad \exists 0 \in K \text{ t.c. } a + 0 = a \quad \forall a \in K$$

(esistenza dello 0)

$$(S4) \quad \forall a \in K \exists b \in K \text{ t.c. } b + a = 0$$

(esistenza dell'opposto)

 $\downarrow$
 $-a$

$$(P1) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(P2) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(P3) \quad \exists 1 \in K \text{ t.c. } a \cdot 1 = a \quad \forall a \in K$$

$$(P4) \quad \forall a \in K \setminus \{0\} \exists b \text{ t.c. } b \cdot a = 1$$

(esistenza del reciproco) $\underbrace{a \neq 0}$ $\uparrow$
 $\frac{1}{a}$

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(Distributiva)

Esempi di campo

$$K = \mathbb{R} \quad (\text{numeri reali})$$

$$K = \mathbb{Q} \quad (\text{razionali}) \quad K = \mathbb{C} \quad (\text{complessi})$$

Esempi di strutture che non sono campi

$$① \mathbb{Z} \quad (\text{interi relativi}) \quad \rightsquigarrow \text{manca } (P4)$$

$$② \mathbb{N} \quad (\text{naturali}) \quad \rightsquigarrow \text{mancano } (S4) \text{ e } (P4)$$

$$③ \mathbb{R}[x] = \text{polinomi a coeff. reali} \quad \rightsquigarrow \text{manca } (P4)$$

SPAZI VETTORIALI

Def. Uno spazio vettoriale su un campo K è un insieme V dove sono definite due operazioni:

- somma tra 2 elementi di V (input: 2 vettori, output: 1 vettore)
- prodotto tra 1 vettore e un elemento di K (input: 1 vettore e 1 el. di K ; output: 1 vettore).

Le due operazioni verificano le seguenti proprietà

$$(S1) \quad v + w = w + v \quad \forall v \in V, \forall w \in V$$

$$(S2) \quad u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u \in V, \forall v \in V, \forall w \in V$$

$$(S3) \quad \exists \vec{0} \in V \text{ t.c. } \vec{0} + v = v \quad \forall v \in V$$

$$(S4) \quad \forall v \in V \exists w \in V \text{ t.c. } v + w = \vec{0}$$

$$(P1) \quad a(bv) = (ab)v \quad \forall v \in V \quad \forall a \in K \quad \forall b \in K$$

$$(P2) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V \quad (1 \text{ è quello del campo})$$

$$(P3) \quad (a+b)v = av + bv \quad \forall a \in K \quad \forall b \in K \quad \forall v \in V$$

$$(P4) \quad a(v+w) = av + aw \quad \forall a \in K, \forall v \in V, \forall w \in V.$$

Esempi di spazio vettoriale D'ora in poi $K = \mathbb{R}$

① $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$v = (x_1, \dots, x_n) \quad w = (y_1, \dots, y_n)$$

$$v + w = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$av = (ax_1, \dots, ax_n) \quad a \in \mathbb{R}$$

Lo 0 vettore è $(0, \dots, 0)$. L'opposto (S4) di v è $(-x_1, \dots, -x_n)$
 Le verifiche delle 8 proprietà sono ovvie

② $\mathbb{R}[x]$ = polinomi a coeff. reali

Le operazioni sono

→ somma di 2 polinomi

→ prodotto di un pol. per un numero reale

Oss. I polinomi si possono anche moltiplicare tra di loro, ma per avere uno sp. vett. non serve

③ $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ = polinomi a coeff. reali di grado $\leq k$.

Oss. $\mathbb{R}_{\geq k}[x]$ NON è uno spazio vettoriale perché la somma potrebbe fare scendere il grado, ad esempio

$$p(x) = x^3 + 2x \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

$$q(x) = -x^3 + x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

MA $p(x) + q(x) \notin \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$, quindi la somma non funziona

④ $M_{m \times n}$ = insieme delle matrici $m \times n$ a coeff. reali è uno sp. vett. reale.

Le operazioni sono

→ somma tra matrici con lo stesso numero di righe e colonne

→ prodotto tra una matrice e un numero

Oss. Il prodotto tra matrici non è rilevante

⑤ L'insieme delle funzioni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dove $[a, b]$ è un intervallo fissato, è uno spazio vett.

Le operazioni sono

→ La somma di 2 funzioni

→ Il prodotto tra una funzione e un numero

La verifica degli assiomi è quasi ovvia.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Def. Sia V uno sp. vett. su un campo $\mathbb{K}$.

Un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ è un sottoinsieme t.c.

(1) $w_1 + w_2 \in W$ per ogni $w_1 \in W$ e ogni $w_2 \in W$

(2) $aw \in W$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ e ogni $w \in W$.

Esempi

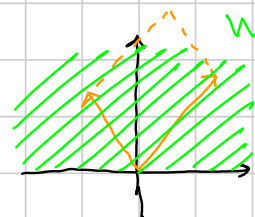
① $V = \mathbb{R}^2$, $W = \text{semipiano superiore}$
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

Devo fare 2 verifiche

→ la somma di el. di W sta in W ? SI

→ Il prodotto tra un elemento di W e un numero sta sempre in W ? NO, ci sta solo se il numero è ≥ 0 .

Conclusione: W NON è un sottospazio



② $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

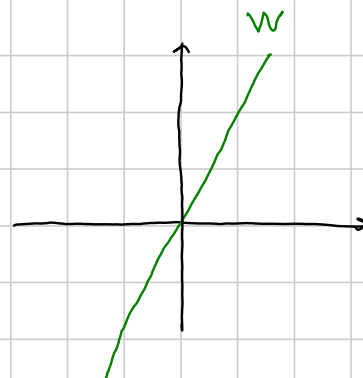
Devo fare 2 verifiche, che a occhio sembrano andare bene

→ prendo 2 vettori generici in W

$$w_1 = (x_1, y_1) \quad \text{quindi} \quad y_1 = 2x_1$$

$$w_2 = (x_2, y_2) \quad \text{"} \quad y_2 = 2x_2$$

La loro somma $w_1 + w_2$ sta in W ? $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 e $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2)$? SI, basta sommare le 2 rel. date



→ prendo $w \in W$, quindi $w = (x, y)$ con $y = 2x$

lo moltiplico per un generico $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ottengo (ax, ay)

Mi chiedo: sta in W ? cioè $ay = 2ax$?

Sì: basta moltiplicare la relazione data per a

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 12

Titolo nota

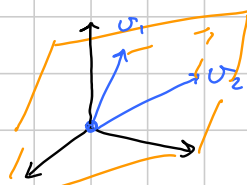
15/10/2014

Def. (Combinazione lineare)Sia V uno spazio vettoriale su un campo K .Siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V (vettori)Siano $c_1, \dots, c_n$ elementi di K .Si dice combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ una qualunque somma del tipo

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Oss. ① È ben definita perché tutti i $c_k v_k \in V$ e la somma di elementi di V sta in V .② Se tutti i v_k stanno in un dato sottospazio W , allora la comb. lin. sta ancora in W .Infatti i $c_k v_k \in W$ e la somma di el. di W sta in W .Def (SPAN) Dati n vettori $v_1, \dots, v_n$ in V si definisce

$$\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$$

l'insieme di tutti i vettori che si scrivono come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.Esempi ① $V = \mathbb{R}^3$, singolo vettore $v_1 \neq 0$ Che cos'è $\text{Span}(\{v_1\})$?Sono tutti i vettori multipli di v_1 , cioè la retta per l'origine di direzione v_1 .② $V = \mathbb{R}^3$, due vettori v_1 e v_2 Che cos'è $\text{Span}(\{v_1, v_2\})$?Sono tutti i vettori del tipo $c_1 v_1 + c_2 v_2$, cioè quelli del tipo $t v_1 + s v_2$ al variare di t ed s , cioè il piano per l'origine che contiene v_1 e v_2 a meno che non siano l'uno multiplo dell'altro (in quel caso è una retta)

Teorema $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$ è un sottospazio vettoriale di V

Dim. Devo fare 2 verifiche.

Somma Prendo $w_1 \in \text{Span}$, $w_2 \in \text{Span}$. Devo dim. che $w_1 + w_2 \in \text{Span}$

$$w_1 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$w_2 = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$$

Allora

$$w_1 + w_2 = (c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c_n + d_n) v_n \in \text{Span}$$

Prodotto Prendo $w \in \text{Span}$, $a \in \mathbb{R}$. Devo dim. che $aw \in \text{Span}$

$$w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$aw = a(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \underbrace{(ac_1)}_0 v_1 + \dots + \underbrace{(ac_n)}_0 v_n \in \text{Span}.$$

Def. (Linearmente indipendenti) Si dice che $v_1, \dots, v_n$ in V sono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che fa 0 è quella con tutti i coeff. nulli.

In simboli

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Viceversa, si dice che sono linearmente dipendenti se esiste una loro comb. lin. con coeff. non tutti nulli che fa 0

Esempio In $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (2, 4, 6)$ sono

LIN. DIP. perché $v_2 = 2v_1$, cioè

$$2v_1 - v_2 = (0, 0, 0)$$

comb. lin. con coeff. non tutti nulli che fa 0

In $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, 1, -1)$ sono LIN. DIP. in quanto

$$v_3 = v_2 - 2v_1$$

e quindi

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

comb. lin. nulla con coeff. $\neq 0$ (almeno)

Def. Si dice che $v_1, \dots, v_n$ in V sono un sistema di generatori se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

In simboli

$$\forall v \in V \exists c_1, \dots, c_n \text{ in } K \text{ t.c. } v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Detto altrimenti

$$V = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}).$$

Analogamente, si dice che $v_1, \dots, v_n$ generano un sottospazio W se

$$W = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}).$$

Def. Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se

- $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V ,
- $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Fatto Tutte le basi di uno sp. vett. V (supposto che ne esistano) hanno lo stesso numero di elementi.

Questo numero si dice DIMENSIONE dello sp. vett. V .

Esempio 1 $V = \mathbb{R}^3$. Una possibile base è

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = (1, 0, 0) \\ v_2 = (0, 1, 0) \\ v_3 = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \text{Base CANONICA (quindi } \dim \mathbb{R}^3 = 3)$$

Perché sono una base? Devo fare 2 verifiche

1 - Sono generatori, cioè ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 . Prendo un generico $v \in \mathbb{R}^3$ e lo scrivo come $v = (a, b, c)$, quindi

$$v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

quindi v è comb. lin. di v_1, v_2, v_3 .

2 - Sono lin. indep., cioè se $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ allora $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Facile

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (c_1, c_2, c_3)$$

e questo è il vettore nullo se e solo se $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

- Esempio 2.1 $V = \mathbb{R}^2$ Una base è $(1,0), (0,1)$
- 2.2 $V = \mathbb{R}^4$... $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$
- 2.3 $V = \mathbb{R}^n$: La base canonica ha n elementi e il k -esimo elemento ha 1 in posizione k e 0 altrove.

Esempio 3 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] =$ polinomi di grado ≤ 3 a coeff. reali.

Una possibile base è

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = x^3 \\ v_2 = x^2 \\ v_3 = x \\ v_4 = 1 \end{array} \right\} \text{Base canonica nello spazio dei polinomi di grado } \leq 3$$

Quindi la dim. è 4.

Devo fare 2 verifiche:

- ogni pol. di grado ≤ 3 è comb. lineare di v_1, v_2, v_3, v_4
 Infatti $ax^3 + bx^2 + cx + d = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$
- sono lin. indep. perché la comb. lin. scritta sopra è il polinomio nullo se e solo se $a=b=c=d=0$.

Più in generale in $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ la dim. è $k+1$ e la base canonica è $1, x, x^2, \dots, x^k$

Esempio 4 $V = M_{2 \times 3}$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \end{array}$$

Una possibile base (la più semplice) è data da 6 vettori

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_4, \dots$$

Le verifiche sono ovvie.

Più in generale $\dim(M_{m \times n}) = m \cdot n$

Esempio 5 Prendiamo $\mathbb{R}[x] =$ tutti i polinomi a coeff. reali.

In questo caso una base con un numero finito di elementi NON esiste. Perché se prendo un numero finito di polinomi

$v_1, \dots, v_n$

c'è sarà un grado massimo g rappresentato, cioè $\text{grado}(v_k) \leq g$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

A questo punto ogni comb. line. di $v_1, \dots, v_n$ ha grado $\leq g$ quindi non posso ottenere tutti i polinomi.

Quindi salta l'essere generatori.

Si dice allora che $\mathbb{R}[x]$ ha dimensione INFINITA.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 13

Titolo nota

15/10/2014

Teorema Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V (stiamo supponendo che esista una base con un numero finito di elementi).

Allora ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli el. della base, cioè esistono unici $c_1, \dots, c_n$ in $\mathbb{K}$ t.c.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

Def. I numeri $c_1, \dots, c_n$ si dicono COMPONENTI di v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$.

Dim. Che esistano $c_1, \dots, c_n$ segue dal fatto che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori.

Devo dim. che sono unici. Supponiamo che ce ne siano degli altri, quindi

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \hat{c}_1 v_1 + \dots + \hat{c}_n v_n$$

Ma allora avrei che

$$(c_1 - \hat{c}_1) v_1 + \dots + (c_n - \hat{c}_n) v_n = \vec{0}$$

↑
vettore nullo

Essendo i $v_1, \dots, v_n$ lin. indep., per forza tutti i coeff. devono essere nulli, quindi

$$c_k - \hat{c}_k = 0 \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n$$

cioè $c_k = \hat{c}_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

— 0 — 0 —

Idea: fissata una base, ogni vettore $v \in V$ "diventa" una n -upla di numeri $c_1, \dots, c_n$ costituita dalle sue componenti.

Esempio 1 Verificare che $(1,2), (2,3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.
Scrivere le componenti di $(-1,4)$ rispetto a tale base

Devo verificare che sono lin. indip. e sono generatori,

Lin. indip. Prendo una comb. lin. generica nulla e verifico che i coeff. sono uguali a 0.

$$a(1,2) + b(2,3) = (0,0) \Leftrightarrow (a+2b, 2a+3b) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a+2b=0 \\ -b=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a=0 \\ \leadsto b=0 \end{matrix}$$

L'unica soluzione è $a=0, b=0$ quindi sono lin. indip.

Generatori Devo verificare che ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ (A,B) è comb. lineare di $(1,2), (2,3)$

$$a(1,2) + b(2,3) = (A,B) \text{ deve avere sempre soluzione}$$

$$\begin{cases} a+2b = A \\ 2a+3b = B \end{cases} \quad (\text{È lo stesso sistema di prima, solo non omogeneo})$$

$$a+2b = A$$

$$-b = B-2A$$

Questo ha sempre soluzione perché ogni colonna ha il PIVOT

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & A \\ 0 & -1 & B-2A \end{array} \right)$$

Come ottengo le componenti di $(-1,4)$. Risolvendo con $A=-1$ e $B=4$, quindi

$$a+2b = -1$$

$$-b = 6$$

$$\leadsto b = -6$$

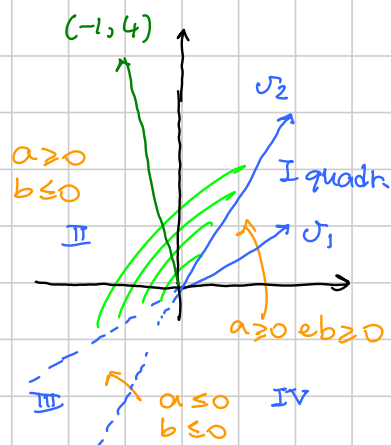
$$a = 11$$

$$\text{VERIFICA: } 11 \overset{o_1}{(1,2)} - 6 \overset{o_2}{(2,3)} = (-1,4) \quad \text{Ok,}$$

Interpretazione geometrica:

scrivo ogni vettore con la regola del parallelogrammo tra $a v_1$ e $b v_2$

— o — o —



Esempio 2 Dimostrare che

$$v_1 = x+1$$

$$v_2 = x^2+2$$

$$v_3 = x-1$$

sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Trovare le componenti di x^2 rispetto a questa base

Lineare indipendente

$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$ e spero che venga
 $a=b=c=0$

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = a(x+1) + b(x^2+2) + c(x-1) = 0$$

$$b x^2 + (a+c)x + (a+2b-c) = 0$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a+c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a+c &= 0 \\ b &= 0 \\ -2c &= 0 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è $a=b=c=0$, cosa che si deduceva dal fatto che ogni colonna della parte coeff. ha il PIVOT.

Sono generatori

Devo fare lo stesso sistema con A, B, C a dx.

Viene per forza che il sistema ha soluzione unica, perché la parte coeff. è la stessa.

Componenti di x^2 Devo risolvere $av_1 + bv_2 + cv_3 = x^2$, cioè

$$bx^2 + (a+c)x + (a+2b-c) = x^2 \quad \text{quindi}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a+c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases}$$

che è ancora un sistema lineare.

— 0 — 0 —

Sistemi lineari vs basi e generatori

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x + 6z = 7 \end{cases}$$

Lo posso pensare in forma vettoriale come

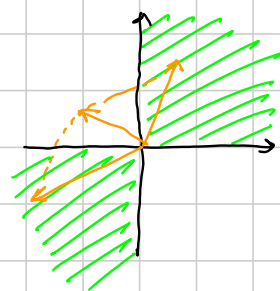
$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

In altre parole, stiamo cercando di scrivere il vettore colonna dei termini noti come comb. lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Quindi, indichiamo con $C_1, \dots, C_n$ le colonne e con B la colonna dei termini noti. Avremo che

- ① Il sistema ha soluzione se e solo se $B \in \text{Span}(\{C_1, \dots, C_n\})$
- ② Se sapessi che le colonne sono generatori, sarei sicuro che c'è sempre almeno una soluzione
- ③ Se sapessi che le colonne sono lin. indep., sarei sicuro che c'è sempre al max una soluzione
- ④ Se sapessi che sono una base, allora la solus. è per forza unica.

Esercizio In $\mathbb{R}^2$, l'insieme costituito da 1° e 3° quadrante è un sottospazio vettoriale?



Il prodotto tra un elemento di W ed un numero qualunque sta sempre in W ? SI

La somma di 2 elementi di W sta sempre in W ? NO
Basta fare un esempio esplicito:

$$w_1 = (1, 2) \in W$$

$$w_2 = (-2, -1) \in W$$

$$w_1 + w_2 = (-1, 1) \notin W. \quad \square$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 14

Titolo nota

22/10/2014

Riassunto delle def.

- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di uno spazio vett. V se ogni $v \in V$ si scrive come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.
- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indep. se

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$
- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se sono generatori e sono lin. indep.

Teorema (esistenza di una base)

Sia V uno sp. vettoriale. Supponiamo che V ammetta un numero finito di generatori.

Allora per forza in V esiste almeno una base.

Teorema (Proprietà delle basi)

Sia V uno sp. vett. in cui esiste un numero finito di generatori.

Allora :

- (1) tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi (questo numero si dice dimensione dello spazio vettoriale),
- (2) dato un insieme di generatori, posso sempre ottenere una base eliminando alcuni elementi,
- (3) dato un insieme di vettori lin. indep., posso sempre ottenere una base aggiungendo un po' di elementi,
- (4) se $\dim V = n$ e ho un insieme di n generatori, allora questi sono per forza una base,
- (5) se $\dim V = n$ e ho un insieme di n vettori lin. indep., allora questi sono per forza una base.

Lemma fondamentale (lemma di sostituzione)

Sia V uno spazio vettoriale.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori lin. indep.

Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ un insieme di generatori.

Allora

(i) $n \leq m$

(ii) Posso sostituire n elementi dei w_k , diciamo $w_1, \dots, w_n$ con $v_1, \dots, v_n$ in modo tale che $\{v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m\}$ siano ancora generatori.

— o — o —

Dim. teo. esistenza base Per ipotesi ho che $v_1, \dots, v_n$ generano V . Considero tutti i possibili sottoinsiemi di $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Alcuni di questi saranno ancora generatori. Tra tutti quelli che sono generatori scelgo quello (o uno qualunque di quelli) che ha il minor numero di elementi. Dico che questo sottoinsieme è una base.

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ questo sottoinsieme (ho cambiato la numerazione). È ovvio che sono generatori.

Devo dim. che sono lin. indep. Supponiamo per assurdo che non lo siano. Allora esiste una comb. lin.

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$$

con i coeff. non tutti nulli. A meno di cambiare i nomi sia $c_1 \neq 0$. Ma allora

$$v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1} v_k$$

Ma allora dico che $\{v_2, \dots, v_k\}$ sono ancora generatori perché qualunque cosa che posso scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$ la posso scrivere anche usando solo $v_2, \dots, v_k$.

Ho così trovato un insieme di gen. con meno di k elementi, che è assurdo.

— o — o —

Dim. ko. proprietà (Dando per buono il lemma di sostituzione)

(1) Prendo 2 basi qualunque

$\{v_1, \dots, v_k\}$

lin. indep.

generatori

$\{w_1, \dots, w_R\}$

generatori

lin. indep.

lemma sost.

$\leadsto k \leq R$

$\leadsto R \leq k$

lemma sost.

$\} \Rightarrow k = R$

(2) Dim. nel teorema precedente. Posso sempre ottenere una base a partire da un sistema di generatori prendendo il + piccolo sottoinsieme che continua a generare.

(3) Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ un insieme lin. indep.

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base

Per il lemma di sost. ho che $m \leq n$ e posso sostituire un po' dei w_k con $v_1, \dots, v_m$ ottenendo ancora dei generatori.

Quindi $\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori (ho supposto di aver sostituito i primi m). Dico che questa è una base. Infatti sono n elementi e generano. Se non fossero una base vorrebbe dire che una base ha meno di n elementi.

(4) Tutte le basi hanno n elementi. Se avessi n el. che non sono una base, per il p.to (2) potrei avere una base eliminando qualcuno, ma allora ci sarebbe una base con meno di n elem.

(5) Tutte le basi hanno n elementi. Se avessi n el. che sono lin. indep. e non sono una base, per il p.to (3) potrei ottenere una base aggiungendo roba (vettori), ma allora avrei una base con più di n elementi.

— o — o —

Esempio 1 Dim. che in $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1,2,1)$, $(0,2,1)$, $(1,1,0)$ sono una base.

Se uso la definizione dovrei fare 2 verifiche:

→ che sono lin. indep.

→ che sono generatori.

Sapendo già che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, basta verificare una qualunque delle due proprietà.

La più semplice è la lineare indipendenza: impongo

$$x(1,2,1) + y(0,2,1) + z(1,1,0) = (0,0,0)$$

e spero di ottenere $x=y=z=0$. (Per essere generatori al posto di $(0,0,0)$ dovrei mettere il generico vettore (A,B,C) e sperare di avere sempre soluzione).

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ 2x + 2y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne della parte coeff. hanno il PIVOT, quindi l'unica sol. è $x=y=z=0$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 Verificare se $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

sono una base di $M_{2 \times 2}$.

Sapendo già che $\dim(M_{2 \times 2}) = 4$ basta verificare la lineare indipendenza

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - z + w = 0 \\ 3y = 0 \\ x + y + w = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ora dovrei lavorare alla Gauss e vedere se ogni colonna della parte coeff. si ritrova il PIVOT.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 15

Titolo nota

22/10/2014

SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

Sia V uno sp. vett. Siano W_1 e W_2 due sottosp. vettoriali.

Domande:

$W_1 \cap W_2$ è un sottospazio?

(SI)

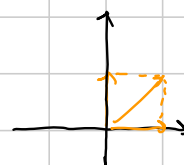
$W_1 \cup W_2$ è un sottospazio?

(NO)

(in generale)

Esempio In $\mathbb{R}^2$ prendo i 2 assi:

sono sottospazi, ma la loro unione non lo è



Dim. che $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio Prendo v_1 e v_2 in $W_1 \cap W_2$

$v_1 + v_2 \in W_1$ (perché somma di el. di W_1)

$v_1 + v_2 \in W_2$ (" " " " " " W_2)

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$

Analogo discorso per αv_1 .

□

Somma di sottospazi

Sia X uno sp. vett.

Siano V e W due sottosp. vett.

Si definisce

$$V + W = \{ v + w : v \in V, w \in W \} = \text{tutte le possibili somme di un el. di } V \text{ e uno di } W$$

Lemma $V + W$ è un sottospazio vettoriale di X .

Dim. Prendo due el. qualunque di $V + W$: $v_1 + w_1$ e $v_2 + w_2$.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{La loro somma è} & (v_1 + w_1) & + & (v_2 + w_2) & = & (v_1 + v_2) & + & (w_1 + w_2) & \in & V + W. \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & v & & w & & v & & w & & \\ & & & & & \underbrace{\qquad}_{\in V} & & \underbrace{\qquad}_{\in W} & & \end{array}$$

Analogamente $\alpha(v_1 + w_1) = \underbrace{\alpha v_1}_{\in V} + \underbrace{\alpha w_1}_{\in W} \in V + W$. $\square$

Teorema (Formula di GRASSMANN)

Siano V e W due sottospazi di uno sp. vett. X .

Allora

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

Dim. Siano $k = \dim(V \cap W)$, $m = \dim V$, $n = \dim W$.

Voglio dim. che $\dim(V+W) = m+n-k$

Prendiamo delle basi.

- Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $V \cap W$
- Essendo $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. indep. in V , posso completarli ad una base di V aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_m$
- Essendo $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. indep. in W , posso completarli ad una base di W aggiungendo $w_{k+1}, \dots, w_n$.

Dico che $\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{V \cap W}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_m}_V, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_n}_W$

sono una base di $V+W$. Se lo dim. ho finito perché sono

esattamente $\underbrace{k}_{V \cap W} + \underbrace{(m-k)}_V + \underbrace{(n-k)}_W = m+n-k$

Devo fare 2 verifiche

(1) Sono generatori Ogni elemento $x \in V+W$ si scrive come

$$x = \underbrace{v}_{V} + \underbrace{w}_{W} = \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m}_V + \underbrace{d_1 v_1 + \dots + d_k v_k + d_{k+1} w_{k+1} + \dots + d_n w_n}_W$$

quindi x è comb. lineare degli $m+n-k$ el. dati.

(2) Sono una base Prendo una comb. lin. che fa 0 generica

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_m v_m + c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n = 0$$

e spero che tutti i coeff. siano nulli,

Porto a dx tutti i w :

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + b_m v_m}_{\in V} = \underbrace{-c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n}_{\in W} \quad (*)$$

ma allora sta in $V \cap W$, ma allora è comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$.

In particolare

$$-c_{k+1} w_{k+1} + \dots + c_n w_n = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k$$

Portando tutto dalla stessa parte abbiamo una comb. lin. di

$v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ che fa 0, ma essendo questi una base di W tutti i coeff. devono essere nulli, quindi in particolare $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$.

Ma allora tornando ad (*) il termine a dx è 0, quindi anche quello a sx è 0, ma quello a sx è una comb. lin. di

$v_1, \dots, v_m$ che è una base di V , quindi ancora una volta tutti i coeff. sono nulli, quindi tutti gli a_i ed i b_i sono nulli.

— 0 — 0 —

Caso particolare Se $V \cap W = \{0\}$, cioè contiene solo lo 0, allora $\dim(V \cap W) = 0$, quindi la formula diventa

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W$$

se l'intersezione è solo $\{0\}$.

Def. Se $V \cap W = \{0\}$ si dice che $V+W$ è una somma diretta e si scrive

$$V \oplus W$$

↑
somma diretta

Fatto fondamentale Ogni vettore $x \in V \oplus W$ si scrive in modo unico come somma di un elemento di V ed un elemento di W .

Dim. Supponiamo che si scriva in 2 modi: $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$.

Allora $\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_1 - w_2}_{\in W}$. Quindi $v_1 - v_2 = w_1 - w_2 \in V \cap W$

ma allora è per forza 0, cioè $v_1 - v_2 = w_1 - w_2 = 0$, quindi $v_1 = v_2$
 $w_1 = w_2$. □

Ogni $x \in V \oplus W$ si scrive in modo unico come $x = v + w$. Allora v e w si dicono le componenti di x rispetto a V e W .

— o — o —

Esempio 1 $X = \mathbb{R}^3$. Siano V e W due s.s.p. con $\dim V = \dim W = 2$ (piani per l'origine).

Cosa possiamo dire dell'intersezione?

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

$\downarrow$
 ≥ 2 e ≤ 3 quindi le possibilità sono

$$\begin{array}{rcl} 3 & + & 1 \quad (V+W = \mathbb{R}^3, V \cap W = \text{retta}) \\ 2 & + & 2 \quad (V \cap W \text{ ha dim } 2, \text{ quindi } V=W) \end{array}$$

Esempio 2 $X = \mathbb{R}^5$ $\dim V = \dim W = 3$

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = 6$$

3, 4, 5

$$\begin{array}{rcl} V=W & \Rightarrow & 3 \quad + \quad 3 \quad \text{non è mai 0, quindi la somma} \\ & & 4 \quad + \quad 2 \quad \text{non può essere diretta} \\ & & 5 \quad + \quad 1 \end{array}$$

Esempio 3 $X = \mathbb{R}^3$ $V = \text{Span}\{(1,0,1), (2,0,1)\}$
 $W = \text{Span}\{(1,1,1), (1,2,1)\}$

$\dim V = 2$ (i generatori sono 2 e sono lin. indep. perché non sono uno multiplo dell'altro)

$\dim W = 2$ (stesso motivo)

Come ricavare $\dim(V+W)$? È semplice che

$$V+W = \text{Span}\{(1,0,1), (2,0,1), (1,1,1), (1,2,1)\}$$

È evidente che i 4 vettori dati NON possono essere lin. indip.
(se lo fossero, la dimensione di $\mathbb{R}^3$ sarebbe ≥ 4).

Provo ad eliminare qualcuno sperando che i rimanenti siano lin. indip. Provo ad eliminare l'ultimo. Restano

$$(1, 0, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 1)$$

Per verificare che sono lin. ind. li metto in colonna e lavoro alla Gauss

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{matrix}$$

PIVOT OK

Sono lin. indip., quindi $\dim(V+W) = 3$, quindi $\dim(V \cap W) = 1$
 $\quad \quad \quad _0 _0 _$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 16

Titolo nota

22/10/2014

Achtung! Due vettori sono lin. dip. se e solo se sono uno multiplo dell'altro ($av+bw=0 \Leftrightarrow v = -\frac{b}{a}w$ posto di poter dividere)
Con tre o più vettori non vale (devo impostare il sistema lineare).

Sottospazi $\rightarrow$ descrizione cartesiana (equazioni)
 $\searrow$ descrizione parametrica (Span)

- ① Capire se q.c. è un sottospazio
- ② Passare da una descrizione all'altra
- ③ Calcolare dim. e basi
- ④ Saper trovare somme e intersezioni

Esempio 1 $X = \mathbb{R}^4$

$$V = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w, x = 3z \} \rightarrow \text{cartesiana}$$

$$W = \text{Span} \{ (1, 0, 3, 1), (1, 0, 3, -2) \} \rightarrow \text{descrizione param.}$$

Calcolare dim. e basi di $V, W, V+W, V \cap W$.

(1) W è un sottospazio (tutti gli Span lo sono) e ha dim. 2
(quelli dati sono 2 vett. lin. indip.)

(2) Come verifico che V è un sottospazio?

Devo fare 2 verifiche

Somma Prendo 2 elementi $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in V$ e $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in V$

Poiché stanno in V si avrà che

$$x_1 + y_1 = z_1 + w_1 \quad x_1 = 3z_1 \quad (*)$$

$$x_2 + y_2 = z_2 + w_2 \quad x_2 = 3z_2 \quad (**)$$

Devo verificare che $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) \in V$, cioè
le sue componenti verificano le stesse equazioni

$$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = (z_1+z_2) + (w_1+w_2)$$

$$(x_1+x_2) = 3(z_1+z_2)$$

E queste seguono sommando quelle date (*) e (**).

Prodotto : stessa cosa.

(3) Una volta che è un sottospazio, come trovo dim. e base di V ?

Risolverò il sistema che descrive V

$$\begin{cases} x+y = z+w \\ x = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ y+2z-w=0 \end{cases}$$

Le variabili z e w sono libere

$$z = t, \quad w = s, \quad y = w - 2z = s - 2t$$

$$x = z + w - y = t + s - s + 2t = 3t$$

$$(x, y, z, w) = (3t, s-2t, t, s) =$$

$$= t(3, -2, 1, 0) + s(0, 1, 0, 1)$$

Quindi $\dim V = 2$ e una base è quella di sopra, cioè

$$V = \text{Span} \{ (3, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \}$$

(4) Voglio dim. e base di $V+W$. Provo a vedere se i 4 vettori (i 2 che generano V e i 2 che generano W) sono lin. indip.

Se lo sono, la dim. è 4 e ho finito.

Come verifico che sono lin. indip.? Risolverò il solito sistema, che si riduce a lavorare alla Gauss sulla matrice che ha i 4 vettori come colonne

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se ottengo 4 PIVOT, posso concludere che $\dim(V+W) = 4$,
quindi $\dim(V \cap W) = 0$ (Grassmann)
quindi $V \cap W = \{0\}$
quindi la somma è diretta.

(5) Se so che la somma è diretta, come determino le componenti di un certo vettore, per esempio di $(2, 1, 1, 3)$?

Detto altrimenti, come scrivo $(2, 1, 1, 3) = v + w$ con $v \in V$ e $w \in W$?

Risolvero il sistema

$$x(3, -2, 1, 0) + y(0, 1, 0, 1) + z(1, 0, 3, 1) + w(1, 0, 3, -2) = (2, 1, 1, 3)$$

Sono sicuro che ha soluz. unica perché i 4 vettori sono una base di $\mathbb{R}^4$.

A questo punto

→ la somma dei primi 2 pezzi è la comp. risp. a V

→ " " degli ultimi " " " " " " " " W .

Esempio 2 $X = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \text{pol. di grado } \leq 3$.

$V = \{p(x) \in X : p(5) = 3\}$ è un sottospazio?

NO! Se prendo due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ t.c. $p_1(5) = 3$ e $p_2(5) = 3$, la loro somma verifica $p_1(5) + p_2(5) = 6 \neq 3$, quindi non va bene.

$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(5) = 0\}$ è un sottospazio? SÌ!

Come calcolo dim. e base?

Il generico polinomio è $a + bx + cx^2 + dx^3 = p(x)$

Impongo la condizione

$$a + 5b + 25c + 125d = 0$$

Ho 3 parametri liberi:

$$d = t \quad c = s \quad b = u \quad a = -5u - 25s - 125t$$

quindi

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (-5u - 25s - 125t, u, s, t) \\ &= t(-125, 0, 0, 1) + s(-25, 0, 1, 0) + u(-5, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Quindi $\dim V = 3$ e una base è

$$\left. \begin{array}{l} -125 + x^3 \\ -25 + x^2 \\ -5 + x \end{array} \right\} \text{ polinomi ricostruiti a partire da } (a, b, c, d)$$

↑ 3 elementi di V linearmente indipendenti.

Esempio 3 $X = M_{2 \times 2}$ $V = \{ A \in M_{2 \times 2} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

è un s.sp. vettoriale? NO!

Prendo 2 matrici A_1 e A_2 che verificano la proprietà

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ che non va bene, quindi non è s.sp.

$V = \{ A \in M_{2 \times 2} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è un s.sp. vett.

Vediamo la dim. e una base $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
e impongo la condizione

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ho così il sistema $\begin{cases} a+2b = 0 \\ c+2d = 0 \end{cases}$

Le variabili libere sono (per esempio) b e d

$$b = t, \quad d = s, \quad c = -2s, \quad a = -2t$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } (a, b, c, d) &= (-2t, t, -2s, s) \\ &= t(-2, 1, 0, 0) + s(0, 0, -2, 1) \end{aligned}$$

Quindi $\dim V = 2$ e una base è

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 4 $W = \text{Span} \{ (1, 0, 3, 1), (1, 0, 3, -2) \}$ in $\mathbb{R}^4$

Voglio scrivere una rappresentazione cartesiana.

Saranno eq. del tipo $ax + by + cz + dw = 0$

Sostituisco $(x, y, z, w) =$ i 2 vettori dati

$$\begin{cases} a + 3c + d = 0 \\ a + 3c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c + d = 0 \\ 3d = 0 \end{cases}$$

Le incognite sono 4: a, b, c, d . Le variabili libere sono b e c .

Quindi

$$b = t, \quad c = s, \quad d = 0, \quad a = -3s$$

$$(a, b, c, d) = (-3s, t, s, 0) = t(0, 1, 0, 0) + s(-3, 0, 1, 0)$$

Quindi 2 possibili eq. sono

$$\rightarrow t=0, s=1 \quad \rightsquigarrow \quad -3x + z = 0$$

$$\rightarrow t=1, s=0 \quad \rightsquigarrow \quad y = 0$$

Conclusione $W = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y=0, z=3x \}$

Oss. Quando si vanno ad intersecare gli spazi è equivalente a mettere a sistema le cartesiane.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 17

Titolo nota

24/10/2014

APPLICAZIONI LINEARI Siano V e W due spazi vettoriali.Un'applicazione lineare è una funzione $f: V \rightarrow W$ tale che

$$(i) \quad f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u \in V, \forall v \in V$$

$$(ii) \quad f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in K$$

Esempio classico La derivata è un'applicazione lineare perché

- la derivata della somma è la somma delle derivate
- la derivata di α volte una funzione è α derivata funzione.

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}$ Come sono fatte tutte le funzioni lineari $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?Posto $k = f(1)$, allora $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = kx$.Quindi tutte le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineari sono del tipo $f(x) = kx$ (il grafico è una retta per l'origine).Oss. Se $f: V \rightarrow W$ è lineare, allora $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

$$[\text{Infatti } f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) \underset{(i)}{=} \alpha f(u) + \beta f(v) \underset{(ii)}{=}]$$

Più in generale "le combinazioni lineari escono fuori da f ", cioè

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$$

Esempio 2 Come sono fatte tutte le $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineari.Risposta: sono del tipo $f(x, y) = kx + ry$ [Posto $f(1, 0) = k$ e $f(0, 1) = r$, avremo che

$$f(x, y) = f(x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)) = x f(1, 0) + y f(0, 1) = kx + ry]$$

Teorema (Struttura delle applicazioni lineari)

Siano V e W due spazi vettoriali. Sia V di dimensione finita, e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ vettori qualunque di W (non è detto che siano generatori e/o lin. indip.).

Allora esiste un'unica funzione lineare

$$f: V \rightarrow W$$

tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Bruttalmente: posso scegliere dove mandare una qualunque base dello spazio di partenza. A quel punto la funzione è fissata ovunque.

Dim.: Un qualunque $v \in V$ lo posso scrivere come comb. lin.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n. \end{aligned}$$

A riga di logica, dovei verificare che la funzione così definita è lineare, ma è una verifica semplice una volta capito cosa c'è da fare. Si tratta di verificare (i) e (ii), cioè

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u). \quad \square$$

Esempio Dimostrare che esiste un'unica funzione lin. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

tale che

$$f(\overset{v_1}{(1,0,1)}) = \overset{w_1}{(2,3)}, \quad f(\overset{v_2}{(1,1,0)}) = \overset{w_2}{(1,0)}, \quad f(\overset{v_3}{(0,1,2)}) = \overset{w_3}{(1,4)}.$$

Calcolare $f(1,1,1)$.

Per il teo. di struttura basta verificare che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$, il che si riduce a lavorare alla Gauss la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} \end{pmatrix} \quad \text{Ok, sono base}$$

Fatto generale Quando metto dei vettori in colonna, il numero di PIVOT è la dimensione dello Span di quei vettori, cioè del sottospazio che essi generano.

Per calcolare $f(1,1,1)$ devo scrivere $(1,1,1)$ come comb. lin. di v_1, v_2, v_3 , cioè risolvere

$$(1,1,1) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,2)$$

che si riduce a risolvere un sistema. A quel p.to

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= x f(v_1) + y f(v_2) + z f(v_3) \\ &= x w_1 + y w_2 + z w_3. \end{aligned}$$

— 0 — 0 — 0 — 0 —

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita ($\dim V = n$, $\dim W = m$)

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W .

Si dice matrice associata ad f (rispetto alle basi date) la matrice così costruita.

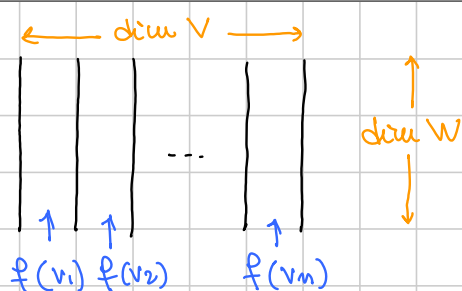
$$\text{Scrivo } f(v_1) = \boxed{a_{1,1}} w_1 + \boxed{a_{2,1}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}} w_m$$

↑ ↑ ↑
1ª colonna della matrice

$$f(v_2) = \boxed{a_{1,2}} w_1 + \boxed{a_{2,2}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m,2}} w_m$$

↑ ↑ ↑
2ª colonna della matrice

Procedendo così ottengo una matrice $m \times n$



Detta A la matrice associata ad f , come calcolo $f(v)$ per un qualunque vettore $v \in V$?

Basta:

- scrivo v come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ ottenendo così n numeri (i coeff.)
- questi n numeri li penso come un vettore colonna x
- moltiplico il vettore per la matrice, cioè calcolo Ax , ottenendo un vettore colonna di lunghezza m
- gli m numeri nel vettore colonna sono i coeff. di $f(v)$ rispetto alla base $w_1, \dots, w_m$.

Esempio $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

$$f(1,0,0) = (2,3) \quad f(0,0,1) = (3,4) \quad f(1,1,0) = (2,5)$$

Intanto esiste unica $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con queste proprietà perché i 3 vettori in parentesi sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Voglio scrivere la matrice di f usando in partenza la base canonica ed in arrivo la base canonica,

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0) & v_2 &= (0,1,0) & v_3 &= (0,0,1) \\ w_1 &= (1,0) & w_2 &= (0,1) \end{aligned}$$

$$f(v_1) = (2,3) = 2w_1 + 3w_2$$

$$\begin{aligned} f(v_2) &= f(0,1,0) = f((1,1,0) - (1,0,0)) \\ &= f(1,1,0) - f(1,0,0) = (0,2) \end{aligned}$$

$$f(v_3) = (3,4) = 3w_1 + 4w_2 = 0w_1 + 2w_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Quanto fa $f(7, 9, -1)$?

Risposta: $(7, 9, -1) = 7 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 35 \end{pmatrix}$$

sono le componenti di $f(7, 9, -1)$
rispetto alla base canonica in arrivo

Conclusione $f(7, 9, -1) = (11, 35) = 11 \cdot w_1 + 35 \cdot w_2$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 18

Titolo nota

24/10/2014

FILOSOFIA

Spazi vettoriali

vettori

} basi

Componenti

Numeri

funzioni

Applicazioni lin. tra sp. vettoriali

} basi

Matrici

Tabelle di numeri

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ Considero $f: V \rightarrow W$ definita come $f(p(x)) = p'(x)$ (derivata)

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2$$

È una funzione lineare perché

$$[p(x)+q(x)]' = p'(x) + q'(x)$$

$$[\alpha p(x)]' = \alpha p'(x)$$

Considero in partenza ed arrivo la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.Voglio scrivere la matrice associata ad f risp. a queste basi

$$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$f(x) = 1$$

$$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$f(x^3) = 3x^2$$

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \\ x \rightarrow \\ x^2 \rightarrow \\ x^3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(1) \quad f(x) \quad f(x^2) \quad f(x^3)$

Se volessi calcolare $f(3x - x^2 + x^3)$ diventa

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ componenti di $f(\dots)$
 $\uparrow$ componenti del polinomio dato

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$W = \mathbb{R}^2$$

Considero $f: V \rightarrow W$ $f(p(x)) = (p(3), p'(2))$

Si verifica facilmente che è lineare.

Voglio la matrice di f usando→ in partenza la base $\{1, x, x^2\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ → in arrivo la base $\{(1,0), (0,1)\}$ $\{w_1, w_2\}$

$$f(v_1) = (1, 0) \rightarrow (\text{polinomio calc. in 3, derivata calc. in 2})$$

$$f(v_2) = (3, 1)$$

$$f(v_3) = (9, 4)$$

La matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix}$

Il giorno che volessi $f(x^2 - 7x + 2)$

$\uparrow 2v_1 - 7v_2 + v_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcolo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -10w_1 - 3w_2 = (-10, -3)$

Riprova $(p(3), p'(2)) = (-10, -3)$.

$\nearrow p'(x) = 2x - 7 \searrow$

Variante: stessa applicazione, ma uso

→ in partenza la base $\{x^{v_1}-1, x^{v_2}+x, -x^{v_3}\}$ } verificare che siano una base!→ in arrivo la base $\{(1,1), (1,0)\}$
 $\begin{matrix} w_1 & w_2 \end{matrix}$

Ricordo $f(p(x)) = (p(3), p'(2))$

$$f(v_1) = f(x-1) = (2, 1) = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$$

$$f(v_2) = f(x^2+x) = (12, 5) = 5 \cdot w_1 + 7 \cdot w_2$$

$$f(v_3) = f(-x) = (-3, -1) = -1 \cdot w_1 - 2 \cdot w_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix}$

Proviamo a calcolare $f(x^2-7x+2)$ usando la nuova matrice

→ scrivo x^2-7x+2 come comb. lin. di v_1, v_2, v_3

$$x^2-7x+2 = -2v_1 + v_2 + 6v_3 \quad (\text{verifica!})$$

→ Moltiplico la matrice B per il vettore colonna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

← comp. di $f(x^2-7x+2)$ rispetto alla base w_1, w_2

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{ricostruisco l'elemento: } f(x^2-7x+2) &= -3w_1 - 7w_2 \\ &= -3(1,1) - 7(1,0) \\ &= \underline{(-10, -3)} \end{aligned}$$

venuto come prima!

— o — o —

Domanda

In uno spazio V ho una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e poi ho una base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$.

Se conosco le componenti di un vettore v rispetto alla prima base, come trovo le componenti di v rispetto alla seconda base?

Possibilmente senza fare tutte le volte il sistema lineare...

MATRICE DI CAMBIO DI BASE Prende in INPUT le componenti rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_m\}$ e restituisce in OUTPUT le comp. dello stesso vettore risp. alla base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$.

Si costruisce così

→ Prendo v_1 e lo scrivo come comb. lin. di $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m$:

$$v_1 = \underbrace{c_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{1ª colonna}}} \hat{v}_1 + \dots + \underbrace{c_m}_{\substack{\uparrow \\ \text{mª colonna}}} \hat{v}_m$$

→ Più in generale, la k -esima colonna sono le componenti di v_k rispetto alla base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$

Questa matrice trasforma le componenti come detto ($m \times m$)

Come funziona il prodotto tra una matrice ed un vettore colonna

1° caso $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{1ª colonna di } A$ $(c_1 | c_2 | \dots | c_m) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
colonne

2° caso $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow \text{posiz. } k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = k\text{-esima colonna di } A$

3° caso $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + \dots + x_m \cdot c_m$

Il prodotto tra una matrice A ed un vettore colonna x è come fare una comb. lin. delle colonne di A usando gli el. di x come coeff.

Questo fa funzionare tutto!

Ad esempio nel caso del cambio di base, se in input do la colonna $x_1, \dots, x_n$, che corrisponderebbe al vettore

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

in output mi ritorna

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_1, \dots, v_n$ scritti rispetto
 alla nuova base

Traducendo: se do in input $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posk}$
 ritorna C_k che sono le
 comp. di v_k rispetto alla nuova base.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 19

Titolo nota

29/10/2014

KER E IMMAGINE DI UNA APPL. LIN.

Siano V e W sp. vettoriali. Sia $f: V \rightarrow W$ un'appl. lineare.

Def. Si dice $\ker(f)$ (nucleo di f) l'insieme

$$\ker(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \quad (\text{vettori in partenza che vanno in } 0)$$

Def. Si dice $\text{Im}(f)$ (immagine di f) l'insieme

$$\text{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \} \quad (\text{tutti i vettori in arrivo che sono immagine di qualcosa})$$

Oss. $\ker(f) \subseteq V$, $\text{Im}(f) \subseteq W$

Teorema (1) $\ker(f)$ è un s.sp. vett. di V
 (2) $\text{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W

Dim. (1) Devo fare 2 verifiche

• somma: dato $v_1 \in \ker(f)$ e $v_2 \in \ker$, è vero che $v_1 + v_2 \in \ker$?

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker(f)$$

$\uparrow$
 $v_1, v_2 \in \ker(f)$

• prodotto: dato $v \in \ker(f)$, dato $\alpha \in \mathbb{K}$, allora $\alpha v \in \ker(f)$ poiché

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$\uparrow$
 $v \in \ker(f)$

(2) Se $w_1 \in \text{Im}(f)$ cioè $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 \in \text{Im}(f)$ cioè $w_2 = f(v_2)$, allora

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im}(f)$$

Analogamente per il prodotto: se $w \in \text{Im}(f)$ cioè $w = f(v)$, allora $\alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \text{Im}(f)$. $\square$

Osservazione Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V .

Allora $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ sono generatori di $\text{Im}(f)$, cioè

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(\{f(v_1), \dots, f(v_m)\})$$

Dim. Prendo un qualunque $w \in \text{Im}(f)$. Allora esiste almeno un $v \in V$ t.c. $f(v) = w$. Soppo v come comb. lin. degli el. della base

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_m f(v_m). \end{aligned}$$

Quindi w è comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_m)$.

Ovviamente vale anche il viceversa, cioè ogni comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sta in $\text{Im}(f)$. $\square$

Fatto generale Siano v_1 e v_2 in V tali che $f(v_1) = f(v_2)$.

Allora $v_1 - v_2 \in \ker(f)$

$$[\text{Dim.: } f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0]$$

Teorema Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{0\}$

Dim. Se è iniettiva, è ovvio che solo 0 può andare in 0.

Viceversa, supponiamo che $\ker(f) = \{0\}$ e dimostriamo l'iniettività.

Prendiamo v_1 e v_2 t.c. $f(v_1) = f(v_2)$.

Per quanto detto sopra si ha $v_1 - v_2 \in \ker(f)$, quindi $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$. $\square$

Teorema (della dimensione) (RANK-NULLITY)Sia $f: V \rightarrow W$ un'applic. lineare.

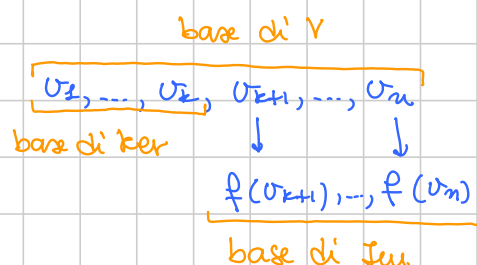
Allora

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V)$$

Dim. Prendo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$ ($k = \dim(\ker)$).Allora i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip. in V .Ma allora posso aggiungere vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ in modo che $v_1, \dots, v_n$ siano una base di V ($n = \dim(V)$).Dico che $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono una base di $\operatorname{Im}(f)$.Se lo dimostro ho finito perchè sono $n-k$.

Quindi devo dim. due cose

- $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono lin. indip.
- $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im}(f)$.

Verifico che generano: ogni elemento $w \in \operatorname{Im}(f)$ è comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ per quanto visto precedentemente, cioè

$$w = \underbrace{c_1 f(v_1) + \dots + c_k f(v_k)}_0 + c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_n f(v_n)$$

quindi w è in realtà comb. lin. di $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$.Verifico che sono lin. indip. Prendo una loro comb. lin. che fa 0:

$$c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_n f(v_n) = 0, \text{ cioè}$$

$$f(c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n) = 0, \text{ cioè}$$

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n \in \ker(f)$$

quindi è comb. lineare dei primi $v_1, \dots, v_k$, quindi

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

Portando tutto a sx ottengo una comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ che fa 0, ma essendo lin. indip. tutti i coeff. devono essere 0, cioè in part.

$$c_{k+1} = \dots = c_n = 0. \quad \square$$

Conseguenza 1 Se $\dim(W) > \dim(V)$, allora f non può essere surgettiva.

Infatti $\dim(\ker) + \dim(\text{Im}) = \dim(V)$
 $\uparrow$
 se fosse surgettiva sarebbe uguale a $\dim(W)$ e non si potrebbe avere uguaglianza

In generale si ha comunque che

$$\dim(\text{Im}) \leq \dim(W)$$

Conseguenza 2 Se $\dim(V) > \dim(W)$, allora f non può essere iniettiva.

Infatti $\dim(\ker) + \dim(\text{Im}) = \dim(V)$, da cui

$$\dim(\ker) = \dim(V) - \dim(\text{Im}) \geq \dim(V) - \dim(W)$$

$$\uparrow$$

 $\dim(\text{Im}) \leq \dim(W)$

VALE
SEMPRE

Quindi se $\dim(V) > \dim(W)$, allora $\dim(\ker) \geq 1$, quindi il $\ker(f)$ non contiene solo lo zero, quindi f NON è iniettiva.

Conseguenza 3 Se $\dim(V) = \dim(W)$, allora

f è iniettiva se e solo se f è surgettiva

Dim. $\dim(\ker) + \dim(\text{Im}) = \dim(V) [= \dim(W)]$

Iniettiva $\Rightarrow \dim(\ker) = 0 \Rightarrow \dim(\text{Im}) = \dim(W) \Rightarrow \text{Im} = W \Rightarrow \text{surg.}$

Surgettiva $\Rightarrow \text{Im} = W \Rightarrow \dim(\text{Im}) = \dim(W) = \dim(V) \Rightarrow \dim(\ker) = 0$
 $\Rightarrow \ker = \{0\} \Rightarrow f$ è iniettiva. $\square$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 20

Titolo nota

29/10/2014

Relazioni tra sistemi lineari, Ker, Im.Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}^3$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (2x + z, y - z, 2x - 2y + 3z)$$

Si verifica facilmente che f è lineare.Classico: calcolare dim e basi di $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$.Per trovare $\ker(f)$ cerco i vettori (x, y, z) t.c. $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$z = t, \quad y = z = t, \quad 2x = -z = -t \Rightarrow x = -\frac{1}{2}t$$

$$\text{Sol. sistema } (x, y, z) = t \left(-\frac{1}{2}, 1, 1 \right)$$

$$\text{Quindi } \dim(\ker(f)) = 1 \text{ e } \ker(f) = \text{Span}\left\{ \left(-\frac{1}{2}, 1, 1 \right) \right\} = \text{Span}\{(-1, 2, 2)\}.$$

Per il teorema della dimensione sappiamo che $\dim(\text{Im}(f)) = 2 = 3 - 1$.

Resta da trovare una base dell'immagine.

Prendo in partenza la base canonica e_1, e_2, e_3 . Allora $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sono generatori di $\text{Im}(f)$, cioè

$$\text{Im}(f) = \text{Span}\{(2, 0, 2), (0, 1, -2), (1, -1, 3)\}$$

*non possono essere lin. indep.*In questo caso una base di $\text{Im}(f)$ è costituita da 2 elementi lin. indep., ad esempio i primi 2: $\{(2, 0, 2), (0, 1, -2)\}$ *sono lin. ind. perché non sono uno multiplo dell'altro**Essendo in uno sp. di dim 2 per forza sono una base*

Esempio 2 $V = W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. $f: V \rightarrow W$
 $f(p(x)) = p'(x)$

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2$$

[è come dire $f(a,b,c,d) = (b, 2c, 3d, 0)$]

Per trovare il $\ker(f)$ risolvo $f=0$, cioè $(b, 2c, 3d, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

La soluzione è $b=c=d=0$ e $a = \text{variabile libera} = t$

Quindi la soluzione è

$$t(1, 0, 0, 0)$$

Quindi $\dim(\ker(f)) = 1$ e una base è il polinomio 1

(che è come dire che i polinomi con derivata nulla sono quelli costanti).

Teo. dim. $\Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 1 = 3$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\dim V \quad \dim(\ker)$

Un sistema di generatori è $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$

cioè $\{\cancel{0}, 1, 2x, 3x^2\}$

Una possibile base dell'immagine è $\{1, 2x, 3x^2\}$, ma un'altra è $\{1, x, x^2\}$

(che è come dire che l'immagine della derivata dei pol. di grado ≤ 3 sono tutti e soli i polinomi di grado ≤ 2),

$_ \circ _ \circ _$

Esempio 3 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = 2x - y + z$

$\dim(\ker) = 2$ Base = $\{(1, 2, 0), (1, 0, -2)\}$

sono 2 e sono lin. indep.

$\dim(\text{Im}) = 3 - 2 = 1$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\text{part.} \quad \ker$

Base = $\{1\}$ oppure $\{-127\}$

(suggettiva, ma non iniettiva)

Sistemi lineari

Un sistema di m equazioni in n incognite si può sempre scrivere nella forma

$$A x = b$$

$\uparrow$ matrice $m \times n$ $\uparrow$ vettore colonna lungo n $\leftarrow$ vettore colonna lungo m

La matrice A la posso pensare come appl. lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che prende in INPUT cose lunghe n e restituisce in OUTPUT cose lunghe m .

Il sistema è **omogeneo** se $b=0$. In questo caso risolvere il sistema $Ax=0$ vuol dire trovare il $\ker$ di f . In particolare l'insieme delle sol. di un sist. lin. omogeneo è uno sp. vett. (la somma di 2 sol. è ancora sol.; i multipli di una sol. sono ancora sol.).

Se $n > m$, allora $\dim \text{partenza} > \dim \text{arrivo}$, quindi di sicuro $\dim(\ker) \geq 1$, quindi ci sono soluzioni oltre quella banale $x=0$.

Un sistema **non omogeneo** può avere o non avere soluzioni.

Le soluzioni esistono se e solo se $b \in \text{Im}(f)$.

Ad esempio, se $n < m$, allora non si può avere surgettività, quindi ci sono dei valori di b per cui il sistema non ha soluzioni.

Quando le soluzioni ci sono, sono date dalla formula

$$x = x_0 + v$$

$\uparrow$ soluzione qualunque $\leftarrow$ soluzione del corrispondente sistema omogeneo

- Voglio risolvere $Ax = b$
- Suppongo di aver trovato una soluzione x_0 (quindi $Ax_0 = b$)
- Come sono fatte TUTTE le altre soluzioni?

Risposta: si ottengo facendo $x_0 + \text{sol. del sistema omogeneo } Ax=0$.

Dim. Sia x una soluzione qualunque, cioè $Ax = b$
 Ma allora $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$
 cioè $x - x_0$ risolve il sistema omogeneo

$$x = x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{\text{sol. sist. omog.}}$$

Viceversa se $Ax_0 = b$ e $Av = 0$, allora
 $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b$,
 cioè $x_0 + v$ risolve il non omogeneo. $\square$

Esempio $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3y - 5z = 5 \end{cases}$

$$z = t, \quad 3y = 5 + 5z = 5 + 5t, \quad y = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}t$$

$$2x = 5 + 3z - y = 5 + 3t - \frac{5}{3} - \frac{5}{3}t = \frac{10}{3} + \frac{4}{3}t \quad x = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}t$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}t, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}t, t \right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) + t \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right)}_{x_0 = \text{sol. sist. non omog.}} + t \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right)}_{\text{generico elemento del ker, cioè soluzione di } Ax = 0}$$

base di ker
 sol. generica di $Ax = 0$

Analogamente posso scrivere $(x, y, z) = \underbrace{(1, 0, -1)}_{\text{sol. di } Ax = b \text{ che si vede a occhio}} + t \underbrace{(2, 5, 3)}_{\text{base di ker}}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 21

Titolo nota

29/10/2014

MATRICE INVERSA

Problema: data una matrice A $n \times n$, trovare (se esiste) una matrice B $n \times n$ tale che

$$AB = BA = I$$

↑ matrice identica $n \times n$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sottoproblemi: (1) come capisco se B esiste?

(2) eventualmente, come calcolo B .

Risposta a (1): esiste la matrice inversa se e solo se visto come applic. lineare è bigettiva.

Essendo dim. in partenza e arrivo uguali, si ha bigettiva $\Leftrightarrow$ iniettiva $\Leftrightarrow \dim(\ker) = 0$

cioè se e solo se il sistema $Ax = 0$ ha solo la soluzione banale $x = 0$

cioè se e solo se lavorando A alla Gauss ritrovo i pivot su ogni colonna. $\square$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

3 pivot $\Rightarrow$ esiste la matrice inversa

Come la calcolo?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 10 & 1 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 25 & 0 & 0 & 5 & -2 & +8 \\ 0 & 100 & 0 & -20 & 28 & -12 \\ 0 & 0 & 25 & 10 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} & \frac{8}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{25} & -\frac{3}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{25} & -\frac{4}{25} \end{array} \right)$$

A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -5 & 7 & -3 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Verifica (che avrebbe fatto) : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Riassumendo : per fare l'inversa di A , parto da $(A | Id)$ e lavoro alla Gauss-Jordan fino ad avere $(Id | B)$. Quella B è l'inversa di A .

Casi particolari 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \leftarrow \text{provare per credere}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ -cd+cd & -bc+ad \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Quando divido per } ad-bc \\ \text{trovo proprio l'identità } 2 \times 2 \end{array}$$

Perché questo sistema funziona?

① Data una qualunque matrice M , fare un passaggio alla Gauss è come moltiplicare M su per una certa matrice R .

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$2^a - 2 \cdot 1^a$

Fare $2^a - 2 \cdot 1^a$ equivale a moltiplicare per

copiare la 1^a riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

↑ copiare la 3^a riga

- ② La lavorata alla Gauss generale è come moltiplicare a sx per una matrice unica

$$\boxed{R_1 \dots R_3 R_2 R_1} M = R \cdot M$$

$\uparrow$ 1° pass.
 $\uparrow$ 2° pass.

$\uparrow$ è come se avessi moltiplicato una volta sola per R

③ $C \cdot (D | E) = (CD | CE)$ (automatico dal prodotto righe per colonne)

$\uparrow$ $m \times m$ $\uparrow$ $m \times m$ $\uparrow$ $m \times n$

- ④ Sono partito da $(A | I)$ e lavorando alla Gauss, cioè moltip. a sx per una certa R, cosa trovo

$$R(A | I) = (RA | R)$$

$\uparrow$ se qui trovo Id, allora vuol dire che $R = A^{-1}$, e la ritrovo

— o — o —

Matrici inverse e cambi di base

Esempio Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ la base canonica: $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,2,3), (0,4,1), (2,1,-1)\}$.

Perché so che è una base?

Dalla matrice so che sono lin. indep., quindi essendo il numero giusto sono una base. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M \quad \text{è il cambio di base dalla } \{v_1, v_2, v_3\} \text{ alla canonica}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ v_1 v_2 v_3 nella canonica

cioè prende in INPUT componenti rispetto alla base nuova e restituisce in OUTPUT componenti rispetto alla canonica

Cioè: il vettore $5v_1 + 7v_2 - 3v_3$ cosa diventa nella canonica?

$$M \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se voglio fare l'operazione inversa, cioè passare dalle comp. rispetto alla canonica a quelle rispetto alla base nuova, allora devo usare la matrice M^{-1}

M : dalla nuova alla canonica, quindi

M^{-1} : dalla canonica alla nuova.

Esempio $v_1 = (2, 3)$ $v_2 = (1, 2)$ $\rightarrow$ sono una base
 $w_1 = (1, -1)$ $w_2 = (3, 1)$ $\rightarrow$ sono una base

Voglio passare dalla w_1, w_2 alla v_1, v_2

$$\{w_1, w_2\} \rightsquigarrow \text{canonica} \rightsquigarrow \{v_1, v_2\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Per fare le cose nel verso giusto devo scrivere

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{Dalla base } w \text{ alla base } v$$

Cosa vuol dire questo? $3w_1 + 2w_2 = 19v_1 - 29v_2$
 $(3, -3) + (6, 2) \quad (38, 57) - (29, 58)$
 $(9, -1) \quad (9, -1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -29 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 22

Titolo nota

31/10/2014

Fatto generale Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori in uno spazio vett. V .
 Supponiamo che v_1 sia comb. lin. degli altri, cioè

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_m v_m.$$

Allora

$$\text{Span} \{v_1, \dots, v_m\} = \text{Span} \{v_2, \dots, v_m\}$$

Dim. Se $v \in \text{Span} \{v_2, \dots, v_m\}$, allora è ovvio che $v \in \text{Span} \{v_1, \dots, v_m\}$.
 (basta usare coeff. 0 davanti a v_1).

Viceversa, se $v \in \text{Span} \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, allora $v \in \text{Span} \{v_2, \dots, v_m\}$.

Infatti

$$\begin{aligned} v &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \quad (\text{sostituisco } v_1) \\ &= c_1 (a_2 v_2 + \dots + a_m v_m) + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \\ &= (c_1 a_2 + c_2) v_2 + \dots + (c_1 a_m + c_m) v_m. \quad \square \\ &\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} \end{aligned}$$

Teorema (di sostituzione) Sia V uno sp. vett. e siano

- $\{v_1, \dots, v_m\}$ lin. indep.
- $\{w_1, \dots, w_m\}$ generatori.

Allora

(i) $m \leq n$

(ii) posso eliminare m dei w_k e sostituirla con tutti i v_k in modo da avere ancora generatori,

Dim. Dimostriamo per induzione su m .

Passo base: $m=1$ $\{v_1\}$ lin. indep. ($v_1 \neq 0$)
 $\{w_1, \dots, w_m\}$ generatori

Il fatto che $1 \leq n$ è ovvio. Devo far vedere che posso sostituire uno dei w_k con v_1 . Essendo i w generatori, posso scrivere

$$v_1 = c_1 w_1 + \dots + c_m w_m$$

Almeno uno dei coeff. è $\neq 0$. A meno di cambiare i nomi possiamo supporre $c_1 \neq 0$. Dico che $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori. Infatti

$$\text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \text{Span}\{v_1, \cancel{w_1}, w_2, \dots, w_n\} \\ = \text{Span}\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$$

Ho usato il fatto generale in quanto w_1 è comb. lin. degli altri:

$$w_1 = \frac{1}{c_1} v_1 - \frac{c_2}{c_1} w_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1} w_n$$

↑
conetto dopo video

Passo induttivo Se è vero per un certo m , allora è vero anche per $m+1$.

Ora abbiamo

$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ lin. indep.

$\{w_1, \dots, w_n\}$ generatori.

Oss.: $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono ancora lin. indep., quindi per ipotesi induttiva $m \leq n$ e posso sostituire m dei w_k con i primi v_k . A meno di cambiare i nomi ottengo che

$\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori.

Mi resta ancora v_{m+1} che vorrei andare a sostituire qui sopra.

Prima domanda: è rimasto qualcuno dei w originali?

Sì, perché altrimenti $\{v_1, \dots, v_m\}$ sarebbero generatori, ma allora v_{m+1} sarebbe comb. lin. di questi, cosa non possibile in quanto $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ erano lin. indep.

Quindi è rimasto almeno un w_k per cui $m+1 \leq n$.

Devo fare l'ultima sostituzione. Scrivo v_{m+1} come comb. lin. dei generatori:

$$v_{m+1} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + c_{m+1} w_{m+1} + \dots + c_n w_n$$

e dico che uno almeno dei coeff. c_k è $\neq 0$. Se fossero tutti 0, vorrebbe dire che v_{m+1} è comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ che non è vero.

A meno di cambiare i nomi sia $c_{m+1} \neq 0$, e allora posso sostituire w_{m+1} con v_{m+1} . Infatti

$$\text{Span} \{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\} = \text{Span} \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \cancel{w_{m+1}}, \dots, w_m\} \\ = \text{Span} \{v_1, \dots, v_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n\}. \quad \square$$

Esercizio 1 Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(0,1,1) = (1,2,3)$$

$$f(1,-1,0) = (1,0,1)$$

$$f(2,2,1) = (3,3,3)$$

Determinare se esiste unica l'applic. con queste proprietà e det. la matrice che la rappresenta usando in partenza ed arrivo la base canonica.

Per la parte esistenza/unicità, usiamo il teo. di struttura. Ci basta verificare che $B = \{(0,1,1), (1,-1,0), (2,2,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Per fare questo lavoriamo alla Gauss la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e se vengono 3 PIVOT siamo a posto.}$$

Come ottengo la matrice?

1° modo Uso sostanzialmente la definizione. Siano e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica.

Come calcolo $f(e_1) = f(1,0,0)$?

Scrivo $(1,0,0)$ come comb. lin. dei 3 vettori dati

$$(1,0,0) = a(0,1,1) + b(1,-1,0) + c(2,2,1)$$

e a quel pto trovo a, b, c risolvendo il sistema e infine calcolo

$$\begin{array}{lcl} e_1 \rightarrow & * & * & * \\ e_2 \rightarrow & * & * & * \\ e_3 \rightarrow & * & * & * \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$

$$f(1,0,0) = a f(0,1,1) + b f(1,-1,0) + c f(2,2,1)$$

2° modo Metodo bonino. La matrice sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Impongo ora le 3 condizioni

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b + c = 1$$

$$e + f = 2$$

$$h + i = 3$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = 1$$

$$d - e = 0$$

$$g - h = 1$$

...

...

Così facendo ottengo un sistema di 8 equazioni in 9 incognite. Risolvendo trovo la matrice.

3° modo Cambio di base...

Considero la matrice

$$\begin{matrix} e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

$$B = \{(0, 1, 1), (1, -1, 0), (2, 2, 1)\}$$

$$C = \{e_1, e_2, e_3\}$$

La matrice A rappresenta f usando in partenza la base B, in arrivo la base canonica. Mi serve la matrice che cambi dalla canonica alla B

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa cambia base dalla B alla canonica.

Quindi quella che mi serve è M^{-1} .

Concludendo quello che cerco è

$$A \cdot M^{-1}$$

↑
cambio di base
in partenza

Cosa fa tutto ciò. Se in INPUT metto un vettore colonna che rappresenta comp. rispetto alla canonica, con M^{-1} ottengo la comp. dello stesso vettore risp. alla base B , poi con A ottengo la comp. di f del vettore rispetto alla canonica, che è quello che volevo.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

-

LEZIONE 23

Titolo nota

31/10/2014

Back to esercizio precedente

$$f(0, 1, 1) = (1, 2, 3)$$

$$f(1, -1, 0) = (1, 0, 1)$$

$$f(2, 2, 1) = (3, 3, 3)$$

4° modo Metodo RAPOANO

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Lavoro alla Gauss-Jordan fino ad avere l'Id nella 3×3 a sx.

A quel p.to quello che ottengo a dx è la trasposta della matrice desiderata, cioè della matrice che rappresenta f dalla canonica alla canonica. Perché funziona?

Siano come prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice di partenza di Rapuano è $(M^t | A^t)$.

Ora lavorare alla GJ è equivalente a moltiplicare a sx per una certa R :

$$R(M^t | A^t) = (RM^t | RA^t)$$

$\downarrow$
Id

Visto che è venuta l'identità $R = (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$, quindi a destra ci troviamo

$$RA^t = (M^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot M^{-1})^t$$

Quindi la trasposta della parte dx è proprio $A \cdot M^{-1}$ che è la matrice ottenuta prima con il metodo 3.

— o — o —

Proprietà della trasposta

- (1) $(A^t)^t = A$ per ogni matrice A
 (2) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$ per ogni A e B "compatibili"
 (3) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ per ogni matrice A quadrata e invertibile

Dim.

(1) Ovvio

(2) Basta scrivere la definizione di prodotto righe $\times$ colonne.

(3) $(A \cdot A^{-1}) = Id = (A^{-1} \cdot A)$

Faccio il trasposto di tutto

$$\begin{array}{ccccc}
 (A \cdot A^{-1})^t & = & Id^t & = & (A^{-1} \cdot A)^t \\
 \downarrow (2) & & \downarrow & & \downarrow (2) \\
 \underbrace{(A^{-1})^t \cdot A^t} & = & Id & = & A^t \cdot \underbrace{(A^{-1})^t}
 \end{array}
 \rightarrow \text{questo dice che } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

— o — o —

Esercizio Consideriamo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (x+z, y-3z+2x)$$

Scrivere la matrice che rappresenta f usando in partenza la base

$$\left\{ \underset{v_1}{(1,0,1)}, \underset{v_2}{(1,2,3)}, \underset{v_3}{(3,3,1)} \right\} \text{ e in arrivo la base } \left\{ \underset{w_1}{(2,3)}, \underset{w_2}{(4,5)} \right\}$$

1° modo Calcolo $f(v_1)$ usando la formula
 $f(v_1) = (2, -1)$ e lo scrivo come comb. lin. di w_1 e w_2 , cioè

$$(2, -1) = a(2, 3) + b(4, 5)$$

 $\rightarrow$ trovo a e b e questi sono la 1ª colonna.Procedo allo stesso modo con v_2 e v_3

$$\begin{array}{ccc}
 w_1 \rightarrow & * & * & * \\
 w_2 \rightarrow & * & * & * \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & f(v_1) & f(v_2) & f(v_3)
 \end{array}$$

2° modo Dovrò cercare $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ e scrivo un sistema di 6 equazioni, ma ora non è chiaro quali (ad esempio calcolando f dei 3 vettori della base canonica)

3° modo Cambio di base.

Scrivo intanto f dalla canonica alla canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

Cosa fa A ?

Prende in input le componenti di $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla canonica e rende in output le comp. di $f(v) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla canonica di $\mathbb{R}^2$.

A me serve la matrice B che

- prende in INPUT le comp. di $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla $\{v_1, v_2, v_3\}$
- rende in OUTPUT " " " $f(v) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla $\{w_1, w_2\}$.

Serve un cambio in partenza ed un cambio in arrivo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La risposta è

$$B = N^{-1} A M$$

$\nwarrow \quad \uparrow \quad \swarrow$
 canonica di $\mathbb{R}^2$ to $\{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ can $\mathbb{R}^3$ to can $\mathbb{R}^3$ dalla strana di $\mathbb{R}^3$ alla canonica di $\mathbb{R}^3$

Cosa fanno le 3 matrici?

- M prende in INPUT le comp. di $v \in \mathbb{R}^3$ risp. alla $\{v_1, v_2, v_3\}$ e rende in output le comp. dello stesso v risp. alla canonica di $\mathbb{R}^3$
- A prende in INPUT le comp. di $v \in \mathbb{R}^3$ risp. alla canonica e rende in output le comp. di $f(v)$ risp. alla canonica di $\mathbb{R}^2$
- N^{-1} prende in INPUT le comp. di $f(v)$ risp. alla canonica di $\mathbb{R}^2$ e rende in output le comp. di $f(v)$ risp. alla $\{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ consideriamo

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0 \}$$

$$V = \text{Span} \{ (1, 3, 5) \}$$

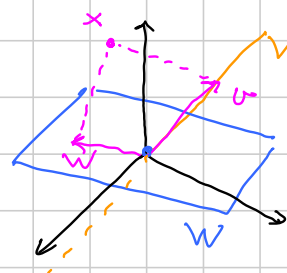
Dim. che $\mathbb{R}^3 = W \oplus V$ e scrivere la matrice che rappresenta (nella base canonica) la proiezione sulla componente W .

Ora W è un sottospazio di dim. 2, e una base è $\{(1,2,0), (1,0,-2)\}$.
Il vettore $(1,3,5)$ è lin. indep. dai primi 2, quindi

$$V+W = \text{Span} \left\{ \underbrace{(1,2,0)}_{w_1}, \underbrace{(1,0,-2)}_{w_2}, \underbrace{(1,3,5)}_v \right\} = \mathbb{R}^3$$

Per Grassmann $\dim(V \cap W) = 0$, quindi la somma è diretta.

Una volta che la somma è diretta, ogni $x \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come $x = v + w$ ← proiezione su W
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $v \in V \quad w \in W$



Come calcolo la proiezione di un certo x risp. a W ?
lo scrivo come $a(1,2,0) + b(1,0,-2) + c(1,3,5)$
e salvo solo le prime 2 componenti.

Quindi è l'appl. lin. t.c.

$$\begin{aligned} f(w_1) &= w_1 & w_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f(w_2) &= w_2 & w_2 &\rightarrow \\ f(v) &= 0 & v &\rightarrow \end{aligned} \quad \leftarrow \text{dalla base } \{w_1, w_2, v\} \text{ alla stessa base}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(w_1) \quad f(w_2) \quad f(v)$

Detta A questa matrice, se voglio dalla canonica alla canonica devo fare

$$M A M^{-1}$$

dove

strana $\leftrightarrow$ can. canonica $\leftrightarrow$ strana

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 24

Titolo nota

05/11/2014

Domande

- ① Dati n vettori, come stabilisco se sono linearmente indipendenti? DETERMINANTE
- ② Dati n vettori, come determino la dimensione del loro Span? RANGO

DETERMINANTE Due modi di vederlo

- ① Funzione che prende in INPUT n vettori in $\mathbb{R}^n$ e restituisce in OUTPUT un numero reale. Il numero restituito è 0 se e solo se gli n vettori in input sono lin. dipendenti.
- ② Funzione che prende in INPUT una matrice $n \times n$ e restituisce un numero.

Il collegamento tra le 2 presentazioni è che la matrice $n \times n$ è quella ottenuta usando come RIGHE gli n vettori della presentazione ①.

Indice

- ① Proprietà fondamentali del determinante.
- ② Conseguenze delle precedenti.
- ③ Determinante nel caso 2×2 e 3×3 .
- ④ Determinante e algoritmo di Gauss.
- ⑤ Sviluppi di LAPLACE per righe.
- ⑥ " " " per colonne.
- ⑦ Det della matrice trasposta
- ⑧ Teorema di BINET
- ⑨ Sviluppi di LEIBNIZ
- ⑩ Applicazioni classiche:
 - formula di CRAIER per sistemi lineari
 - formula per l'inversa
 - formula misteriosa per vettori perpendicolari

① Definizione assiomatica di determinante

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori qualunque di $\mathbb{R}^n$.

Il Det è una funzione che soddisfa queste 4 proprietà:

(Det 1) $\text{Det}(e_1, \dots, e_n) = 1$ (pensati gli n vettori come righe, viene fuori la matrice identica)

(Det 2) Se tra gli n vettori ce ne sono due uguali, allora $\text{Det} = 0$.

Se $v_i = v_j$ per $i \neq j$, allora $\text{Det}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

(Osservazione: se ci sono 2 vettori uguali, allora $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti, quindi è ragionevole pretendere $\text{Det} = 0$)

(Det 3) $\text{Det}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$

(se moltiplico uno dei vettori per λ , la costante "esce fuori")

(Det 4) "la somma esce fuori":

$$\text{Det}(v_1, \dots, \bar{v}_i + \hat{v}_i, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

Oss. (Det 3) e (Det 4) sono equivalenti a dire che il Det, visto come funzione di un singolo vettore v_i (pensando gli altri $n-1$ come fissi, è una funzione lineare.

— o — o —

Teorema misterioso (esistenza e unicità)

Esiste un'unica funzione che soddisfa le 4 proprietà

(Det 1), (Det 2), (Det 3), (Det 4).

— o — o —

(Def 5) Se sostituisco un vettore con una combinazione lineare, allora la combinazione lineare esce fuori

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, \dots, c_1 w_1 + \dots + c_k w_k, \dots, v_n) = \\ c_1 \text{Det}(v_1, \dots, w_1, \dots, v_n) + \\ + c_2 \text{Det}(v_1, \dots, w_2, \dots, v_n) + \\ \dots \\ + c_k \text{Det}(v_1, \dots, w_k, \dots, v_n) \end{aligned}$$

[Bien. Prima uso (Det 4) per fare uscire la somma, poi (Det 3) per fare uscire le costanti].

(Det 6) Se scambio due vettori tra di loro, allora Det cambia segno

$$\text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = (-1) \cdot \text{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Sim. $0 = \det(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n)$
 $\uparrow$
 $(\det 2)$
 $= \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n)$
 $= \det(v_1, \dots, v_i, \dots, \underset{0}{v_i}, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$
 $+ \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v_j, \dots, \underset{0}{v_j}, \dots, v_n)$

Poiché la somma fa 0, il secondo è l'opposto del terzo.

Notazione (Det 6) si riassume dicendo che Det è ALTERNANTE

(Det 7) Se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dip., allora $\text{Det}(v_1, \dots, v_n) = 0$

(Questo è metà di quello che volevamo all'inizio)

(Cresta che $v_1, \dots, v_n$ lin. indip. $\Rightarrow \text{Det} \neq 0$)

Dim. Se sono dipendenti vuol dire che esiste $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ con i coeff. non tutti nulli.

Questo vuol dire che almeno un vettore lo posso scrivere come comb. lin. degli altri. Facciamo finta che sia v_1 :

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \text{Det}(a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, v_2, \dots, v_n) \\ &= a_2 \text{Det}(v_2, v_2, \dots, v_n) = 0 \\ &\quad + a_3 \text{Det}(v_3, v_2, \dots, v_n) = 0 \\ &\quad + \dots = 0 \end{aligned}$$

(in ogni riga ci sono 2 vettori uguali, quindi $\text{Det} = 0$).

Caso 2×2

$$v_1 = (a, b)$$

$$v_2 = (c, d)$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, v_2) &= \text{Det}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= a \text{Det}(e_1, ce_1 + de_2) + b \text{Det}(e_2, ce_1 + de_2) \\ &= \underbrace{ac \text{Det}(e_1, e_1)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 2) \\ 0}} + \underbrace{ad \text{Det}(e_1, e_2)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 1) \\ +}} + \underbrace{bc \text{Det}(e_2, e_1)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 6) \\ -\text{Det}(e_1, e_2) \\ -1}} + \underbrace{bd \text{Det}(e_2, e_2)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 2) \\ 0}} \end{aligned}$$

Conclusione: $\text{Det}(v_1, v_2) = ad - bc$

In termini di matrici

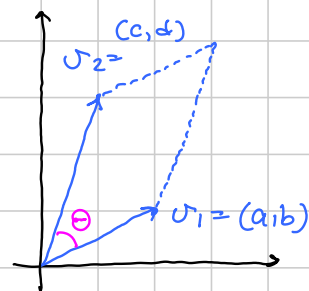
$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Interpretazione geometrica

$\text{Det}(v_1, v_2)$ = Area del parallelogrammo
dato dai vettori v_1 e v_2
(a meno del segno)

Dall'interpretazione geometrica è ovvio che

$\text{Det} = 0 \Leftrightarrow$ parallelogrammo è degenere
 $\Leftrightarrow v_1, v_2$ sono lin. dip.



Dimostrazione dell'interpretazione geometrica

1° modo Scompone il parallelogrammo in tanti rettangoli e triangoli

2° modo Area = lato · lato · $\sin \theta$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sin \theta$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \quad (\text{sviluppo i conti})$$

$$= \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|$$

Il segno del determinante è

- positivo se v_1 raggiunge v_2 ruotando in senso antiorario di un angolo $< 180^\circ$.
- negativo se la rotazione è oraria.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 25

Titolo nota

05/11/2014

Determinante 3×3

$$v_1 = (a, b, c)$$

$$v_2 = (d, e, f)$$

$$v_3 = (g, h, i)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(v_1, v_2, v_3) = \text{Det}(ae_1 + be_2 + ce_3, de_1 + e \cdot e_2 + fe_3, ge_1 + he_2 + ie_3)$$

= ora dovei usare la linearità per portare fuori le somme e le costanti (vengono 27 comodi termini)
 = tenendo conto che tutti quelli con 2 vettori uguali sono nulli

$$\begin{aligned}
 &= aei \underbrace{\text{Det}(e_1, e_2, e_3)}_1 + bfg \underbrace{\text{Det}(e_2, e_3, e_1)}_1 \\
 &\quad + cdh \underbrace{\text{Det}(e_3, e_1, e_2)}_1 + ceg \underbrace{\text{Det}(e_3, e_2, e_1)}_{-1} \\
 &\quad + bdi \underbrace{\text{Det}(e_2, e_1, e_3)}_{-1} + afh \underbrace{\text{Det}(e_1, e_3, e_2)}_{-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Det}(e_2, e_3, e_1) = -\text{Det}(e_1, e_3, e_2) = \text{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$\text{Det}(e_3, e_1, e_2) = -\text{Det}(e_1, e_3, e_2) = \text{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

Conclusione:

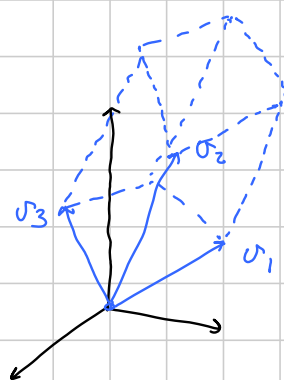
$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

REGOLA DI SARRUS

$$\begin{array}{ccccc}
 a & b & c & a & b \\
 d & e & f & d & e \\
 g & h & i & g & h
 \end{array}$$

Interpretazione geometrica: volume del "parallelepipedo" determinato dai vettori v_1, v_2, v_3

Questo avrebbe dimostrato, ed è un esercizio di geometria analitica.



Idea: Vol parallelepipedo = 6 Vol. tetraedro

= Area base · altezza
 ↑
 area parallelogrammo
 dato da v_1 e v_2

← distanza di v_3
 dal piano che
 contiene v_1 e v_2

Ancora una volta Vol = 0 $\Leftrightarrow$ parallelepipedo degenere

$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ lin. dipendenti

— 0 — 0 —

Achtung! Non vale l'analogo di SARRUS dalla dimensione 4 in poi.

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(0, -1, 5)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) \\ &\quad - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) \\ &= 15 - 2 + 4 = 17 \neq 0 \quad \text{Ok.} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Determinante e algoritmo di GAUSS

Come cambia il Det se lavoro alla Gauss sulla matrice?

- scambiare 2 righe comporta un cambio di segno
- sostituire una riga R_i con $R_i + b R_j$ (ultraortodossa)

$$\text{Det}(R_1, \dots, R_i + b R_j, \dots, R_n) = \text{Det}(R_1, \dots, R_i, \dots, R_n)$$

↑
posizione i

$$+ b \text{Det}(R_1, \dots, R_j, \dots, R_n)$$

!! perché R_j c'è 2 volte

Quindi le operazioni ultrortodosse non cambiano il Det.

Conclusione: se uso Gauss in versione ultrortodossa allora

$$\text{Det}(\text{matrice finale}) = \text{Det}(\text{matrice iniziale}) \cdot (-1)^k \leftarrow \begin{array}{l} \text{numero degli} \\ \text{scambi di} \\ \text{riga} \end{array}$$

Oss Se non faccio l'ultrortodossa, cioè cambio R_i con $aR_i + bR_j$, il determinante risulta moltiplicato per a .

Conseguenza: se so calcolare il Det delle matrici a scala, so calcolare tutti i determinanti (basta ricordare quanti scambi di riga si sono fatti).

Determinante delle matrici DIAGONALI

Una matrice diagonale ha tutti 0 al di fuori della diagonale principale, sulla quale volendo ci sono altri zeri oppure no

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

Fatto: $\text{Det}(\text{Diag}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

Dim. $\text{Det}(\text{Diag}) = \text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$
 $= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$
 $= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \text{Det}(e_1, e_2, \dots, \lambda_n e_n)$
 $= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \text{Det}(e_1, \dots, e_n)$
 $= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot 1$

Matrici TRIANGOLARI SUPERIORI

Sono matrici che hanno tutti 0 sotto la diagonale principale

quello che per pare

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

tutti zeri

Fatto generale $\text{Det}(T) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

Dim. Il primo vettore v_1 si scrive come

$$v_1 = \lambda_1 e_1 + \underbrace{* e_2 + \dots + * e_n}_w$$

quindi

$$\text{Det}(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(\lambda_1 e_1 + w, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$+ \text{Det}(w, v_2, \dots, v_n)$$

questi sono n vettori tutti con la prima componente nulla, quindi sono linearmente dipendenti, quindi il loro Det è 0.

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

Allo stesso modo posso scrivere $v_2 = \lambda_2 e_2 + w$

↑
ha solo comp. da e_3 in poi

$$\text{Det}(\text{iniziale}) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2 + w, v_3, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$+ \lambda_1 \text{Det}(e_1, w, v_3, \dots, v_n)$$

$= 0$ perché sono n vettori con la 2ª comp. $= 0$, quindi sono lin. dip.

Procedendo allo stesso modo si ottiene che $\text{Det}(T) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

— 0 — 0 —

Come calcolo il Det di una matrice? Lavoro alla Gauss fino ad avere una matrice a scala, che sarà triangolare superiore, per cui lo so fare.

Chi dice che lavorando alla Gauss in modo diverso, ma sempre ultrarortodosso, venga sempre lo stesso risultato?

Se venisse diverso, vorrebbe dire che non esiste nessuna funzione che verifica $(\text{Det } 1), \dots, (\text{Det } 4)$.

Detto altrimenti: Gauss dimostra l'unicità del Det.

Se dimostro l'esistenza, allora deve per forza venire uguale anche lavorando in modo diverso.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 26

Titolo nota

05/11/2014

SVILUPPI DI LAPLACE

SOTTOMATRICI E MINORI Sia M una matrice $m \times n$, anche non quadrata. Una sottomatrice $R \times k$ è una qualunque matrice $R \times k$ ottenuta eliminando da M $(m-R)$ righe e $(n-k)$ colonne, anche in maniera non consecutiva

Esempio

1	2	5	7
0	1	3	
2	5	13	5

 $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ possibile sottomatrice

Nel caso in cui A sia una matrice $n \times n$ quadrata, si indica con A_{ij} la matrice quadrata $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la riga i e la colonna j .

Esempio

1	2	3	4
0	1	0	2
5	7	1	9
4	2	3	5

 $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Si definiscono MINORI i determinanti delle sottomatrici quadrate.

Sviluppi di Laplace per colonne

Rispetto alla 1ª colonna Sia $A = \{a_{i,j}\}$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \cdot \text{Det } A_{k,1}$$

Esempio 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\oplus 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \ominus 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \oplus 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

I segni sono alterni !

$$= 32 - 3 \cdot 14 + 2 \cdot (-6) = 32 - 42 - 12 = -22 = \text{Det } A$$

Rispetto alla j -esima colonna

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \cdot \text{Det } A_{k,j}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Rispetto alla 2ª colonna :

$$- 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) - 5 = -2 - 15 - 5 = -22 = \text{Det } A$$

Esercizio Verificare che venga -22 anche rispetto alla 3ª colonna
o rispetto a SARRUS.

Laplace rispetto alla riga i -esima

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{i,k} \cdot \text{Det } A_{i,k}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Rispetto alla 3^a riga:

$$2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - (-1) \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-6) + (-5) + 5 \cdot (-1) = -12 - 5 - 5 = -22$$

Esempio

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ \hline 7 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Calcolare il Determinante.

Opzione 1: lavorare alla Gauss

Opzione 2: Laplace astuti, cioè usare la terza riga o la 4^a colonna.Uso la 4^a colonna

$$\text{Det (iniziale)} = +3 \cdot \text{Det } A_{2,4} = 3 \cdot 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ 12 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

↑
il segno va
fatto nella 4x4

e questo si può concludere con
Sarrus.

$$\begin{array}{ccccc} - & 0 & - & 0 & - \end{array}$$

Conseguenza $\text{Det } A = \text{Det } A^t$ per ogni matrice quadrata A Dica. Dato per buono che gli sviluppi di Laplace, comunque fatti, danno il determinante basta osservare cheSviluppo di $\text{Det } A$ rispetto alla 1^a colonna =" " $\text{Det } A^t$ " alla 1^a riga. $\square$

$$\begin{array}{ccccc} - & 0 & - & 0 & - \end{array}$$

Teorema evidente Lo sviluppo di Laplace rispetto ad una qualunque colonna fornisce una funzione che verifica $(\text{Det } 1), \dots, (\text{Det } 4)$.

Conseguenze. Dato per buono il teorema precedente segue che

- il Det esiste, cioè c'è almeno una funzione che verifica i 4 assiomi
- poiché sappiamo da Gauss che la funzione è unica, allora il risultato non può dipendere dalla colonna,
— 0 — 0 —

Teorema Gli sviluppi per riga danno lo stesso risultato di quelli per colonna.

Dim. Ci sono 3 casi

1° caso La riga rispetto a cui sviluppo ha tutti 0 e un solo 1.

Cosa succederebbe se sviluppassi per colonna?

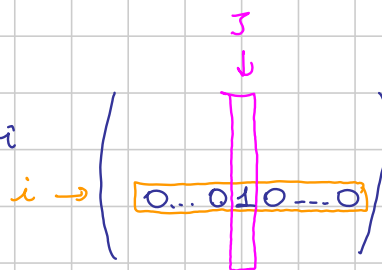
Troverei tutti 0 (dovuti alla riga di zeri) tranne in posizione i, j dove trovo

$$(-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \text{Det } A_{i,j}$$

che è lo stesso che trovo lavorando sulla riga i .

2° caso La riga rispetto a cui sviluppo ha tutti 0 e un solo 1. Questo è uguale al precedente

3° caso Sulla riga in questione c'è di tutto



$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Det originario = somma degli n determinanti
 = (per il caso precedente)

$$= (-1)^{i+1} a_{i,1} \cdot \text{Det } A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} \cdot \text{Det } A_{i,2} + \dots$$

e questo è lo sviluppo per riga.

— 0 — 0 —

Operativamente, come calcolo un determinante?

- Per il caso generale, Gauss è un metodo efficiente
- Se ci sono tanti zeri, allora un Laplace astuto può essere utile.
- In dim 2 e 3 si usa SARRUS.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 27

Titolo nota

07/11/2014

SVILUPPI DI LEIBNITZ

Po' utili per il calcolo operativo dei determinanti

Forniscono una dim. alternativa dell'esistenza e chiariscono la struttura di un determinante.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \boxed{aei} + \boxed{bfg} + \boxed{cdh} - ceg - bdi - afh$$

- ① Tutti i termini che compaiono è il prodotto di 3 elementi della matrice, presi in modo che ce ne sia esattamente uno per riga ed uno per colonna.
- ② Tutti i prodotti di questo tipo compaiono nello sviluppo
- ③ Per decidere il segno, associa ad ogni termine una permutazione degli elementi della base canonica

$$bdi \rightsquigarrow e_2, e_1, e_3$$

Il segno dipende da quanti scambi servono per arrivare con l'ordinamento classico $\{e_2, e_1, e_3\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3\} \rightsquigarrow \text{segno} -$

Altro esempio: $bfg \rightsquigarrow \{e_2, e_3, e_1\} \rightsquigarrow \{e_1, e_3, e_2\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3\} \rightsquigarrow \text{segno} +$

Esempio $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

- Il Det sarà la somma di $4! = 24$ addendi
- Ogni addendo è il prodotto di 4 termini
- Il segno $\pm$ dipende dagli scambi

$$\{e_3, e_2, e_4, e_1\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_4, e_3\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \quad 2 \text{ scambi, quindi segno} +$$

Caso particolare: se c'è una riga di tutti 0, allora tutti gli addendi sono uguali a zero.

Idem se c'è una colonna di tutti zero,

Se la matrice è diagonale, c'è al massimo un addendo che è diverso da 0.

Teorema di Binet $\boxed{\text{Det}(AB) = \text{Det} A \cdot \text{Det} B}$

Si intende che A e B sono matrici $n \times n$.

Conseguenza $\text{Det}(A^{-1}) = [\text{Det}(A)]^{-1} = \frac{1}{\text{Det} A}$

Dim. $A \cdot A^{-1} = \text{Id}$, quindi per Binet

$$1 = \text{Det}(\text{Id}) = \text{Det} A \cdot \text{Det}(A^{-1}), \text{ da cui la tesi. } \square$$

Dim. BINET Siano A e B matrici $n \times n$.

Dati n vettori $v_1, \dots, v_n$ considero il numero

$$\text{Det}(v_1 B, v_2 B, \dots, v_n B) \cdot \frac{1}{\text{Det} B} = f(v_1, \dots, v_n)$$

$\boxed{v_i} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \text{---}$ $\uparrow$ n vettori riga, quindi ha senso farne il determinante

Si verifica che $f(v_1, \dots, v_n)$ soddisfa le proprietà $(\text{Det} 1), \dots, (\text{Det} 4)$.

Se lo facessi, avrei che

$$f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(AB)$$

$(\text{Det} 1) \quad f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Cosa succede se faccio

$$\begin{aligned} f(e_1, \dots, e_n) &= \text{Det}(e_1 B, \dots, e_n B) \cdot \frac{1}{\text{Det} B} \\ &= \text{Det}(R_1^B, \dots, R_n^B) \cdot \frac{1}{\text{Det} B} \end{aligned}$$

$$= \text{Det} B \cdot \frac{1}{\text{Det} B} = 1$$

(Det 2) Se ci sono v_i e v_j uguali, allora $f(v_1, \dots, v_n) = 0$.

$$f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(\dots, \underbrace{v_i B, \dots, v_j B}_{\text{uguali}}, \dots) \frac{1}{\text{Det } B} = 0$$

La verifica di (Det 3) e (Det 4) è simile.

— 0 — 0 —

Aggiunto dopo video: così la dim. non è completa. Vedi inizio lezione successiva

Formula di CRAMER per i sistemi lineari SOLO PER SISTEMI $\square$

Sistema lineare $n \times n$:

$$A x = b$$

$\uparrow$ matrice $n \times n$ $\uparrow$ vettore colonna
 incognite lungo n

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$$

dove A_i è la matrice ottenuta sostituendo la colonna i -esima di A con la colonna dei termini noti b .

La formula funziona se $\text{Det } A \neq 0$ e questa condizione garantisce che la soluzione esiste ed è unica per ogni b .

Esempio

$$2x + 3y - z = 2$$

$$x - y + 3z = 1$$

$$x + z = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\text{Det } A}$$

$$y = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}}{\text{Det } A}$$

$$z = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{\text{Det } A}$$

Vantaggio: posso calcolare una incognita senza dover calcolare le altre

$$x = \frac{-2 + 45 - 5 - 3}{-2 + 9 - 1 - 3} = \frac{35}{3}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 28

Titolo nota

07/11/2014

Back to dim. BINETFatto 1 Sia M una matrice. Allora

$$\text{Det}(e_1 M, \dots, e_n M) = \text{Det}(R_1^M, \dots, R_n^M) = \text{Det } M$$

Fatto 2 Come casi particolari del precedente abbiamo

$$\text{Det}(e_1 A, \dots, e_n A) = \text{Det } A$$

$$\text{Det}(e_1 AB, \dots, e_n AB) = \text{Det}(AB)$$

Fatto 3 Posto $f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1 B, \dots, v_n B) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$

Si verifica (fatto del precedente) che $f(v_1, \dots, v_n)$ soddisfa $(\text{Det } 1, \dots, \text{Det } 4)$, da cui

$$f(v_1, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$$

Fatto 4 $\text{Det}(A) = \text{Det}(\underbrace{e_1 A}_{v_1}, \dots, \underbrace{e_n A}_{v_n})$ (Fatto 2)

$$= f(e_1 A, \dots, e_n A) \quad (\text{Fatto 3})$$

$$= \text{Det}(e_1 AB, \dots, e_n AB) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$$

↓ (Fatto 2)

$$= \text{Det}(AB) \cdot \frac{1}{\text{Det } B}$$

Moltiplicando per $\text{Det } B$ ottengo la tesi

o o o

Oss. Resterebbe il caso in cui $\text{Det } B = 0$.

Dim. CRAMER Siano $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A .
La soluzione $x = (x_1, \dots, x_n)$ del sistema lineare è tale che

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = b$$

Ora $\text{Det}(A) = \text{Det}(C_1, \dots, C_n)$

Sostituisco la colonna i -esima con b . Cosa succede ?

$$\text{Det}(A_i) = \text{Det}(C_1, \dots, b, \dots, C_n)$$

↑
ho sostituito
 C_i con b

$$= \text{Det}(C_1, \dots, x_1 C_1 + \dots + x_n C_n, \dots, C_n)$$

$$= x_1 \text{Det}(C_1, \dots, C_1, \dots, C_n) + x_2 \text{Det}(C_1, \dots, C_2, \dots, C_n) + \dots$$

} sono tutti = 0 tranne quello in cui vado a mettere C_i

$$= x_i \text{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

$$= x_i \text{Det } A$$

Dividendo ottengo $x_i = \frac{\text{Det } A_i}{\text{Det } A}$

— 0 — 0 —

FORMULA PER LA MATRICE INVERSA

1° modo : parto da $(A; I)$ e lavoro alla Gauss fino ad avere $(I; B)$. Allora $B = A^{-1}$.

2° modo :

- ① A_{ij}
- ② segui
- ③ Trasposta
- ④ Divisione per il determinante

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{Det } A = 3 + 8 + 6 - 1 = 16$$

①

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ 6 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ho sostituito ogni elemento a_{ij}
con A_{ij} .

② Aggiusto i segni secondo la sdita regola

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -6 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

③

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

④

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Esempio 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

①

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

②

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

③

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

④

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Oss. Volendo la formula per la matrice inversa segue da CRAMER.

Ad esempio, detta $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la prima colonna dell'inversa, deve succedere

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con CRAMER
trovo $x_1, \dots, x_n$

FORMULA PER I VETTORI PERPENDICOLARI

Dati $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (u_2 w_3 - u_3 w_2, -u_1 w_3 + u_3 w_1, u_1 w_2 - u_2 w_1)$$

Detta A la matrice da cui siamo partiti, si tratta del vettore

$$(A_{1,1}, -A_{1,2}, A_{1,3})$$

$$z = (z_1, z_2, z_3)$$

Perché questo $\vec{z} \perp$ sia a U sia a W

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{Se sviluppo il Det rispetto alla 1ª riga ottengo}$$

$$u_1 A_{1,1} - u_2 A_{1,2} + u_3 A_{1,3} = 0$$

$\uparrow$ prodotto scalare tra $\vec{z}$ e $\vec{U}$
 $\uparrow$ ci sono 2 righe uguali

Analogamente

$$\langle z, w \rangle = w_1 A_{1,1} - w_2 A_{1,2} + w_3 A_{1,3} =$$

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} w \\ u \\ w \end{pmatrix} = 0$$

— 0 — 0 —

Analogo in dimensione superiore, ad esempio in dim. = 4.

Sono dati 3 vettori x, y, z in $\mathbb{R}^4$. Voglio trovare un vettore w che sia $\perp$ a tutti e 3.

Metodo bovino Soppo $w = (a, b, c, d)$, auspicio di essere $\perp$ a x, y, z e ho 3 equazioni in 4 incognite

Con i determinanti

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

Considero il vettore

$$w = (A_{1,1}, -A_{1,2}, A_{1,3}, -A_{1,4})$$

Questo è una possibilità.

Si dimostra come nel caso 3×3 .

— 0 — 0 —

Esercizio $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ $C = (0, 1, 0)$ $D = (2, 1, 1)$

Calcolare il volume del tetraedro con vertici in A, B, C, D .

1° modo Calcolo l'area di ABC , pensandolo come base

Calcolo la distanza tra D ed il piano $ABC \rightarrow$ altezza

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area}(ABC) \cdot \text{altezza}$$

2° modo Calcolo $B-A, C-A, D-A$ e faccio il Det e divido per 6 (Potevo fare anche $A-B, C-B, D-B, \dots$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1 - 2 - 2 + 1 = -4$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

3° modo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vol} = \frac{1}{6} |\text{Det matrice } 4 \times 4|$$

Perché funziona?

lavoriamo alla Gauss in modo da lasciare un solo 1 nell'ultima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ora sviluppo alla Laplace rispetto alla quarta colonna ottengo

$$-1 \cdot \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

matrice 3x3 precedente ottenuta facendo le differenze

Analogamente, dati 3 pti nel piano $A = (a_1, a_2)$

$$B = (b_1, b_2)$$

$$C = (c_1, c_2)$$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{poi val. assoluto}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 29

Titolo nota

10/11/2014

RANGO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $m \times n$. Si definiscono

- R-rango il massimo numero di righe lin. indep.
- C-rango " " " " colonne " "
- D-rango la massima dimensione di una sottomatrice quadrata con $\det \neq 0$ (massima dim. di un minore non nullo)

Oss. R-rango $\leq m$, C-rango $\leq n$, D-rango $\leq \min\{m, n\}$.

Def. equivalenti

Il C-rango è

- (i) il massimo k per cui esistono k colonne lin. indep.
- (ii) $\dim \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$ dove $C_1, \dots, C_n$ sono le colonne di A
- (iii) $\dim(\text{Im}(A))$ nel momento in cui pensiamo A come applic. lin.
 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Il R-rango è

- (i) il massimo k k righe lin. indep.
- (ii) $\dim \text{Span}(R_1, \dots, R_m)$ dove $R_1, \dots, R_m$ sono le righe di A
- (iii) $\dim(\text{Im}(A^t))$.

Il D-rango è

- (i) il massimo k per cui esiste una sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$.

TEOREMA Per ogni matrice A si ha R-rango = C-rango = D-rango.

Oss. Dim. il te., avendo che $\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Proposizione 1 (Rango e algoritmo di Gauss)

Le operazioni dell'algoritmo di Gauss lasciano invariato R-rango e C-rango.

Proposizione 2 Se S è una matrice a scala, allora

$$\text{R-rango}(S) = \text{C-rango} = \text{numero dei PIVOT} \\ = \text{numero righe sopravvissute}$$

Proposizione 3 Una matrice quadrata $n \times n$ a scala ha

$$\text{R-rango} = \text{C-rango} = n$$

se e solo se $\text{Det} \neq 0$.

Dalle proposizioni segue il teorema.

Dim. Prop. 1 Iniziamo con il R-rango

Se scambio le righe, è ovvio che $\dim \text{Span}(R_1, \dots, R_n)$ non cambia.
Se sostituisco R_j con $aR_j + bR_i$ con $a \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} \text{Span}(R_i, R_j, \text{altre righe}) &= \text{Span}(R_i, R_j, aR_j + bR_i, \text{altre righe}) \\ &\quad \uparrow \text{posso eliminare il 3°} \\ &= \text{Span}(R_i, aR_j + bR_i, \text{altre righe}) \\ &\quad \uparrow \text{posso eliminare il 2°} \end{aligned}$$

Quindi non cambiamo le dim, che sono il R-rango.

Continuiamo al C-rango Prendo una matrice A e lavorando alla Gauss ottengo una matrice B . Per la teoria dei sistemi lineari, le soluzioni di $Ax = 0$ sono tutte e sole le soluzioni di $Bx = 0$.

$\ker A$

$\ker B$

Ma allora $\ker A = \ker B$ e quindi $\dim \ker A = \dim \ker B$ e pertanto

$$\begin{aligned}
 \text{C-rango}(A) &= \dim(\text{Im}(A)) && (\text{rank-nullity}) \\
 &= n - \dim(\ker(A)) \\
 &= n - \dim(\ker(B)) \quad \uparrow \\
 &= \dim(\text{Im}(B)) && (\text{rank-nullity}) \\
 &= \text{C-rango}(B) \\
 &\quad \text{--- } \circ \text{ --- } \circ \text{ ---}
 \end{aligned}$$

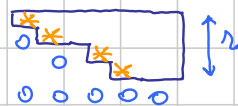
Oss. È vero che $\ker A = \ker B$

Non è vero che $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$

È vero che $\dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(B))$

--- $\circ$ --- $\circ$ ---

Dim. Prop. 2 Prendiamo una matrice $m \times n$ a scala. Supponiamo che ci siano esattamente r righe non nulle, quindi esattamente r PIVOT.



R-rango È ovvio che non possono esserci più di r righe lin. indip. Afferisco che le prime r righe $R_1, \dots, R_r$ sono lin. indip. Prendiamo una comb. lin.

$$c_1 R_1 + \dots + c_r R_r = 0$$

Guardando alla prima posizione (cor. al 1° pivot) si vede che $c_1 = 0$. Ma allora anche $c_2 = 0$ (basta guardare alla posizione del 2° pivot). E così via.

C-rango $\text{Span}(C_1, \dots, C_n) \subseteq \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$,
quindi $\text{C-rango} = \dim \text{Span}(C_1, \dots, C_n) \leq r$

Devo dimostrare che esistono r colonne lin. indip.

A tal fine basta scegliere quelle con i PIVOT, che risultano lin. indip. per lo stesso motivo di sopra (questa volta si parte dal fondo).

--- $\circ$ --- $\circ$ ---

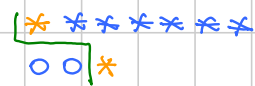
Prop 1 + Prop 2 $\Rightarrow$ R-rango = C-rango per ogni matrice A

Dim. Prendo A e lavoro alla Gauss fino ad avere S a scala.
A questo p.to

$$\text{R-rango}(A) \underset{\text{Prop 1}}{=} \text{R-rango}(S) \underset{\text{Prop 2}}{=} \text{C-rango}(S) \underset{\text{Prop. 1.}}{=} \text{C-rango}(A) \quad \square$$

Dim. Prop. 3 Se una matrice a scala $n \times n$ ha n pivot, allora tutti gli el. della diagonale principale devono essere $\neq 0$, cioè tutti gli scalini sono scalini da 1.

Quindi R-rango = C-rango = n
 $\Rightarrow \text{Det} \neq 0$


se c'è uno scalino da almeno, mi ritrovo in fondo una riga tutta nulla

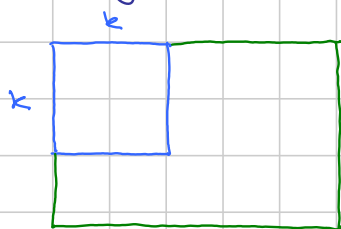
Oss. Questo completa gli obiettivi del determinante, cioè per una matrice quadrata

- righe lin. dip. $\Rightarrow \text{Det} = 0$ (fatto quasi subito)
- righe lin. indip. $\Rightarrow \text{Det} \neq 0$.

— 0 — 0 —

Dim. che D-rango = R-rango

D-rango $\leq$ R-rango Sia $r = \text{R-rango}$. Sia $k > r$. Voglio dire che ogni sottomatrice $k \times k$ ha $\text{det.} = 0$

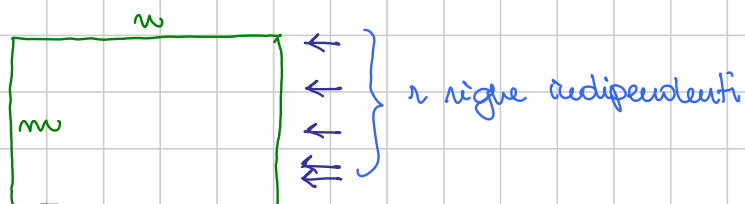


} k righe: sono per forza dipendenti come righe della matrice grande (altrimenti R-rango sarebbe $\geq k$)

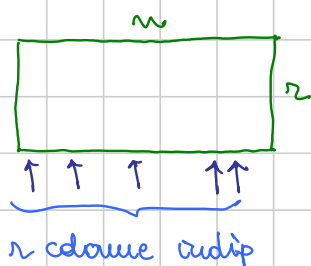
In particolare le k righe sono lin. dip. anche come righe della matrice piccola

Quindi la matrice piccola ha per forza $\text{Det} = 0$.

D-rango $\geq$ R-rango Posto come sopra $r = R\text{-rango}$, devo trovare una sottomatrice $r \times r$ con $\det \neq 0$.



Prendo queste ed escludo le altre. Ottengo



Questa matrice $r \times n$ ha $R\text{-rango} = r$,

Ma allora ha pure $C\text{-rango} = r$

Ma allora ha r colonne lin. indep.

Prendo queste ed escludo le altre. Ottengo



Questa matrice $r \times r$ ha r colonne indep,

quindi $R\text{-rango} = C\text{-rango} = r$.

Ma essendo quadrata avrà per forza $\det \neq 0$
(basta ridurla a scala e usare la Prop. 3).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 30

Titolo nota

10/11/2014

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Consideriamo un sistema lineare $Ax = b$ (m equazioni, n incognite)

Consideriamo la matrice completa $A' = (A | b)$.

Allora il sistema lineare ha soluzione se e solo se

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A'$$

Quando ha soluzione, allora detto r il valore comune dei due ranghi, l'insieme delle soluzioni dipende da $n-r$ parametri.

Esempio 37 equazioni, 52 incognite e supponiamo

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A' = 25.$$

Allora il sistema ha soluzione dipendente da $52 - 25 = 27$ parametri.

Lavorando alla Gauss trovo 25 pivot, quindi ho 27 colonne senza pivot che corrispondono ai parametri liberi.

Oss. In generale

$$\text{Rango } (A') = \begin{cases} \nearrow \text{Rango } (A) & \leadsto \text{sistema ha soluzione} \\ \searrow \text{Rango } (A) + 1 & \leadsto \text{il sistema a scala diventa del tipo} \end{cases}$$



rende impossibile l'esistenza di soluzioni

Dim. alternativa: c'è soluzione se e solo se $b \in \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$,
cioè se e solo se

$$\text{Span}(C_1, \dots, C_n) = \text{Span}(C_1, \dots, C_n, b)$$

$$\downarrow$$

$$\dim = \text{Rango } (A)$$

$$\downarrow$$

$$\dim = \text{Rango } (A').$$

Caso particolare : Dato un sistema $n \times n$, se $\text{rang}(A) = n$ allora c'è soluzione qualunque sia b e la soluzione è unica

Dim. $\begin{array}{c|c} & n \\ \hline & m+1 \end{array}$ $n \leq \text{Rang}(A') \leq \min\{n, m+1\} = n$
 $\uparrow$
 $\text{Rang}(A)$

Quindi per forza $\text{rang} A' = \text{rang} A$.

L'insieme delle soluzioni dipende da $n - \underbrace{r}_n$ parametri $\rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow$

Oss. Avevamo visto a suo tempo che ogni soluzione del sistema

$$Ax = b$$

si scrive nella forma

$$x = x_0 + w$$

$\uparrow$ soluzione fissata $\uparrow$ sol. generica di $Aw = 0$, cioè w è un generico el. del $\ker$, che ha dimensione $n-r$

Esempio 1

$$2x + 3y + z = 1$$

$$x - z = a$$

Domanda : per quali valori di a il sistema ha soluzioni ?

$\det \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array} \right) \quad 2 \leq \text{Rang} A' \leq 2$$

$\uparrow$ ci sono solo 2 righe

$\text{rang} A = 2$

Quindi sempre $\text{rang} A = \text{rang} A' = 2$, quindi sempre ci sono soluzioni dipendenti da $n-r = 3-2 = 1$ parametri

Esempio 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Sistema di 3 equ. in 3 incognite con un parametro

Det della sottomatrice senza la 3^a colonna:

$$-6 + 10 - 36 - 20 \neq 0$$

Quindi $\text{Rango } A' = 3$.

Ma allora c'è soluzione $\Leftrightarrow \text{Rango } A = 3$

$$\Leftrightarrow \det A \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + 12a + a - 18$$

$$\Leftrightarrow 13a - 21 \neq 0$$

Esempio 3 $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in questo spazio prendiamo i polinomi

$$p_1(x) = x^2 + 1$$

$$p_2(x) = x^3 + 1$$

$$p_3(x) = x^2 - x$$

Domanda: $\dim(\text{Span}(p_1, p_2, p_3))$

1° modo

Spero che siano lin. indip., così $\dim = 3$. Per vedere se lo sono, risolvo il sistema $ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0$ e spero che l'unica sol. sia $a=b=c=0$.

2° modo

Scrivo le componenti di p_1, p_2, p_3 rispetto ad una base, ad esempio la canonica,

$$\begin{matrix} & 1 & x & x^2 & x^3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Spero che abbia rango = 3.

Spero di trovare un minore 3×3 con

$$\det \neq 0$$

Se elimino la prima colonna si vede subito che ciò che resta ha $\det \neq 0$, quindi il rango è 3.

Esempio 4 In $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ considero i polinomi

$$p_1(x) = x^2 - x + 1$$

$$p_2(x) = x^2 - ax$$

$$p_3(x) = x + 2$$

Calcolare, al variare di a , la dimensione dello span (p_1, p_2, p_3)

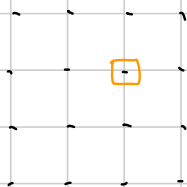
Passo in componenti, e costruisco la matrice

$$\begin{matrix} & 1 & x & x^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Osservo che $\text{Det } A_{2,2} \neq 0$ sempre, quindi $\dim \geq 2$ sempre.

Quindi $\dim = 3$ se e solo se $\text{Det} \neq 0$ e questo è un conto.

Esercizio È data una matrice 4×4 di cui tutto è fisso, meno un elemento, diciamo $a_{2,3}$.



Posso scegliere il valore di $a_{2,3}$ in modo che $\text{Det } A$ venga quello che voglio, ad esempio 0 oppure 2014?

Immagino di fare LAPLACE rispetto alla 2ª riga:

$$\underbrace{-a_{2,1} \cdot \text{Det } A_{2,1}}_{\text{fisso}} + \underbrace{a_{2,2} \cdot \text{Det } A_{2,2}}_{\text{fisso}} - \underbrace{a_{2,3} \cdot \text{Det } A_{2,3}}_{\substack{\downarrow \\ \text{scelta} \\ \text{mia}}} + \underbrace{a_{2,4} \cdot \text{Det } A_{2,4}}_{\text{fisso}}$$

Ci sono 2 casi:

→ se $\text{Det } A_{2,3} = 0$, allora il $\text{Det } A$ non cambia qualunque valore io dia al parametro

→ se $\text{Det } A_{2,3} \neq 0$, allora $\text{Det } A$ è di 1° grado rispetto a $a_{2,3}$, quindi posso ottenere quello che voglio.

— 0 — 2 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 31

Titolo nota

12/11/2014

BASI ORTOGONALI
BASI ORTONORMALI

Def. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ n vettori in $\mathbb{R}^n$.

- Si dice che costituiscono una base ortogonale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

- Si dice che costituiscono una base ortonormale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{come prima})$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

↓ equivalente a dire che sono vettori di lunghezza 1.

Esempio La base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ è ortonormale.

Fatto semplice Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base ortogonale, allora

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \quad \text{sono una base ortonormale.}$$

Dim. Se $i \neq j$, allora $\langle w_i, w_j \rangle = \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle$

$$= \frac{1}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} \cdot \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_0 = 0$$

$$\langle w_i, w_i \rangle = \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2} \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\|v_i\|^2} = 1.$$

Oss. Se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ e $v_i \neq 0$ per ogni i , allora per forza $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti, quindi se sono in numero giusto costituiscono per forza una base.

Dim. Supponiamo per assurdo che non siano lin. indip.
Allora c'è una loro comb. lin.

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

con almeno un coeff. $\neq 0$. Sia $c_i \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle = c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &\quad \downarrow \text{tutti nulli tranne l'i-esimo} \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \\ &\quad \downarrow \neq 0 \quad \downarrow \neq 0 \quad \text{ASSURDO} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Teorema Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ qualunque.

Allora la componente di v rispetto a v_i è $\langle v, v_i \rangle$.
Di conseguenza

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

Dim. Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, posso scrivere in modo unico

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

↑ ↑
componenti di v

$$\begin{aligned} \langle v, v_1 \rangle &= \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_1 \rangle = c_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=1} + \underbrace{c_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_1 \rangle}_{\text{tutti } 0} \\ &= c_1 \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che $c_1 = \langle v, v_1 \rangle$

Allo stesso modo si dimostra che $c_i = \langle v, v_i \rangle$, da cui la tesi. $\square$

— 0 — 0 —

Oss. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ era solo ortogonale, avrei ottenuto

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Dato un vettore, come determino le sue componenti rispetto ad una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ data?

1° modo Scrivo $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ con coeff. $c_1, \dots, c_n$ incogniti. Risolvendo un sistema lineare opportuno trovo $c_1, \dots, c_n$.

2° modo Se conosco le componenti di v rispetto ad una base "comoda" $\{w_1, \dots, w_n\}$, posso ottenere le componenti rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ costruendo una volta per tutte la matrice di cambio di base.

3° modo Se la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è **ortonormale** basta calcolare il prodotto scalare $\langle v, v_i \rangle$.

Se è solo ortogonale, si calcola $\frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.

Come trovo basi ortonormali?

Risposta: procedimento di **ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT**

INPUT: base $\{v_1, \dots, v_n\}$ qualunque (di $\mathbb{R}^n$)

OUTPUT: base $\{w_1, \dots, w_n\}$ ortogonale tale che

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \quad \forall k=1, \dots, n$$

Algoritmo: $w_1 = v_1$ (questo rende banalmente vero che $\text{Span}\{v_1\} = \text{Span}\{w_1\}$)

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

Idea: voglio $w_2 = v_2 + a v_1$ e scelgo a in modo tale che $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$.

Imponendo l'equazione viene

$$0 = \langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 + a v_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + a \langle v_1, w_1 \rangle$$

da cui

$$a = - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle v_1, w_1 \rangle} = - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$$

da cui la formula di sopra.

Questo garantisce che $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$ e $\text{Span}\{w_1, w_2\} = \text{Span}\{v_1, v_2\}$.

Ora procedo ponendo

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

Idea: cerco w_3 della forma $w_3 = v_3 + a w_1 + b w_2$

e impongo $\langle w_3, w_1 \rangle = \langle w_3, w_2 \rangle = 0$

$$0 = \langle w_3, w_1 \rangle = \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_1 \rangle = \langle v_3, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle + b \langle w_2, w_1 \rangle$$

$\leadsto$ trovo a

$$0 = \langle w_3, w_2 \rangle = \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_2 \rangle = \langle v_3, w_2 \rangle + a \langle w_1, w_2 \rangle + b \langle w_2, w_2 \rangle$$

$\leadsto$ trovo b .

Descrizione generale dell'algoritmo:

$$w_1 = v_1$$

$\vdots$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

$$= v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

Osservazione Una volta prodotta una base ortogonale, è immediato avere una ortonormale.

Esempio Ortogonalizzare $\overset{v_1}{(1, 0, 1)}, \overset{v_2}{(0, 2, 1)}, \overset{v_3}{(1, 3, 1)}$ come base di $\mathbb{R}^3$.

$$w_1 = v_1 = \boxed{(1, 0, 1)}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 \\ &= (0, 2, 1) - \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{2} (1, 0, 1) = (0, 2, 1) - \frac{1}{2} (1, 0, 1) \\ &= \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\ &= (1, 3, 1) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) - \frac{-\frac{1}{2} + 6 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= (1, 3, 1) - (1, 0, 1) - 6 \cdot \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) = \dots$$

Verificare a mano che sono venuti 3 vettori ortogonali.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 32

Titolo nota

12/11/2014

ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO

Def. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.
Si definisce ortogonale di W l'insieme

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

↑
vettori che sono perpendicolari
a tutti i vettori di W

Proposizione $W^\perp$ è in realtà un sottospazio vettoriale

Dim. Devo fare 2 verifiche

Somma: se $v_1 \in W^\perp$ e $v_2 \in W^\perp$, è ancora vero che $v_1 + v_2 \in W^\perp$?

Preso un qualunque $w \in W$,

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \underbrace{\langle v_1, w \rangle}_0 + \underbrace{\langle v_2, w \rangle}_0 = 0 \quad \text{OK}$$

Prodotto: se $v \in W^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$, è ancora vero che $av \in W^\perp$?

Preso $w \in W$ ho che $\langle av, w \rangle = a \underbrace{\langle v, w \rangle}_0 = 0 \quad \text{OK}$

Esempi concreti

① $W =$ piano in $\mathbb{R}^3$, allora $W^\perp =$ retta per l'origine $\perp$ al piano per l'origine

② $W =$ retta in $\mathbb{R}^3$ per l'origine, allora $W^\perp =$ piano per l'origine $\perp$ alla retta

Teorema (Proprietà dell'ortogonale) Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottosp. vett.

Allora

$$(i) \quad W \cap W^\perp = \{0\}$$

$$(ii) \quad \mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

$$(iii) \quad (W^\perp)^\perp = W \quad (\text{facendo 2 volte l'ortogonale si torna indietro})$$

Dim. (i) Sia $v \in W \cap W^\perp$. Allora v deve essere ortogonale a tutti gli elementi di W , quindi anche a se stesso, cioè $\langle v, v \rangle = 0$, cioè $v = 0$.

(ii) Devo dimostrare che $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$; a quel pto la somma è diretta perché $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Prendo una base $\{w_1, \dots, w_k\}$ di W . La completo ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $w_{k+1}, \dots, w_n$.

Ortogonalizzo tutto con GS (Gram-Schmidt).

Otengo una nuova base di $\mathbb{R}^n$

$\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_k, \hat{w}_{k+1}, \dots, \hat{w}_n$
 $\downarrow$ Base ortogonale di W (sono ortogonali e $\text{Span}\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$)
 $\downarrow$ sono una base di $W^\perp$ perché sono ortogonali ai precedenti e sono in numero sufficiente

Conseguenza: se W ha dimensione k , allora $W^\perp$ ha dimensione $n-k$ (non può averla più grande perché altrimenti l'intersezione non potrebbe essere il solo $\{0\}$)

Ogni vettore v di $\mathbb{R}^n$ si scrive dunque come

$$v = \underbrace{c_1 \hat{w}_1 + \dots + c_k \hat{w}_k}_{\in W} + \underbrace{c_{k+1} \hat{w}_{k+1} + \dots + c_n \hat{w}_n}_{\in W^\perp}$$

(iii) Sostanzialmente ovvio $(W^\perp)^\perp =$ vettori ortogonali a $W^\perp$

Due vettori di W e $W^\perp$ sono ortogonali tra di loro e per ragioni di dimensione ci deve essere uguaglianza.

— 0 — 0 —

Esercizio classico: dato $W \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto con equazioni o come Span , trovare $W^\perp$ e trovare basi ortogonali di W e $W^\perp$.

Esempio 1 In $\mathbb{R}^3$ prendiamo $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$

① Trovo una base di W : $\{(-3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$, cioè
 $W = \text{Span} \{ \underbrace{(-3, 0, 1)}_{U_1}, \underbrace{(-2, 1, 0)}_{U_2} \}$

② Trovo una base ortogonale di W , facendo G-S a partire da U_1 e U_2 :

$$W_1 = U_1 = \boxed{(-3, 0, 1)}$$

$$W_2 = U_2 - \frac{\langle U_2, W_1 \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} W_1$$

$$= (-2, 1, 0) - \frac{6}{10} (-3, 0, 1)$$

$$= (-2, 1, 0) - \left(-\frac{9}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right)}$$

Verifica: $\langle W_1, W_2 \rangle = 0$ ok.

Volevo una base ortogonale è anche: $w_1 = (-3, 0, 1)$, $w_2 = (1, -5, 3)$

In particolare è anche vero che $W = \text{Span} \{(-3, 0, 1), (1, -5, 3)\}$

③ Trovo $W^\perp$: so già che avrà dimensione $3 - 2 = 1$.
 Quindi mi basta trovare un vettore $\perp$ a w_1 e w_2 .
 Come posso fare?

1° modo Lo cerco del tipo (a, b, c) impostando il sistema

$$\begin{aligned} \langle (a, b, c), (-3, 0, 1) \rangle &= 0 \\ \langle (a, b, c), (1, -5, 3) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Risolvere...

2° modo Uso la formula misteniosa a partire da $(-3, 0, 1)$ e $(1, -5, 3)$
oppure a partire da $(-3, 0, 1)$ e $(-2, 1, 0)$

3° modo Uso gli a, b, c del piano, cioè $(1, 2, 3)$

Ora so che $W^\perp = \text{Span} \{(1, 2, 3)\}$

Alla fine, volendo, abbiamo che

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span} \left\{ \underbrace{(-3, 0, 1), (1, -5, 3)}_{\text{base ortogonale di } W}, \underbrace{(1, 2, 3)}_{\text{base (ortog.) di } W^\perp} \right\}$$

base ortogonale di $\mathbb{R}^3$

Domanda ulteriore. Chi sono le componenti di $(1, 1, 1)$ rispetto a questa base?

$$c_1 = \frac{\langle (1, 1, 1), (-3, 0, 1) \rangle}{\langle (-3, 0, 1), (-3, 0, 1) \rangle} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

e così via per le altre, _ o _ o _

Esempio 2 $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - 2w = 0\}$

W = soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2w = 0 \end{cases}$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 33

Titolo nota

12/11/2014

MATRICI ORTOGONALITeorema Sia A una matrice $n \times n$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(1) $A^{-1} = A^t$.

(2) Le colonne di A sono ortonormali.(3) Le righe di A sono ortonormali.Def. Se succede una qualunque delle 3 proprietà precedenti, allora la matrice si dice ortogonale.Dim. (1) $\Rightarrow$ (2)Per ipotesi $A^{-1} = A^t$. Come kni le colonne devono essere ortonormali

$$A = (c_1 | c_2 | \dots | c_n) \quad A^t = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix}$$

$$Id = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} \cdot (c_1 | c_2 | \dots | c_n) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

L'elemento in posizione (i, j) della matrice prodotto è $\langle c_i, c_j \rangle$ e quindi questo è 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$.

Quindi le colonne sono ortonormali.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se le colonne sono ortonormali, allora $A^t \cdot A = Id$ e quindi $A^t = A^{-1}$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Guardo le righe

$$Id = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \overline{R_1} \\ \overline{R_2} \\ \vdots \\ \overline{R_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_n \end{pmatrix}$$

L'elemento (i,j) del prodotto è $\langle R_i, R_j \rangle$ e questo è 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$. Quindi le righe sono ortonormali.

(3) $\Rightarrow$ (1) Righe ortonormali $\Rightarrow A \cdot A^t = Id \Rightarrow A^t = A^{-1}$.

— o — o —

Oss. Se voglio dim. che (2) $\Leftrightarrow$ (3), il modo più comodo e veloce è di passare attraverso (1).

— o — o —

Oss. Se le colonne di A sono solo ortogonali, allora $A^t \cdot A$ viene una matrice diagonale, e gli elementi sulla diagonale sono proprio $\langle C_i, C_i \rangle$.

— o — o —

Teorema (Proprietà delle matrici ortogonali)

Sia A una matrice ortogonale. Allora

(1) $\det A = \pm 1$

(2) A^{-1} è ortogonale

(3) Se anche B è ortogonale, allora AB è ortogonale

Dim. (1) $A \cdot A^t = Id$ Per Binet si ha:

$$\det(A) \cdot \det(A^t) = \det(Id)$$

"

"

"

$$\det(A) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

(2) $A^{-1} = A^t$. Se A è ortogonale, allora le sue colonne sono ortonormali, ma allora le righe di A^t sono ortonormali, ma allora A^t è ortogonale, quindi anche A^{-1} lo è

(3) Ipotesi: $A^{-1} = A^t$ $B^{-1} = B^t$

Tesi: $(AB)^{-1} = (AB)^t$

$$(AB)^{-1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà} \\ \text{inversa}}}{B^{-1}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{A^{-1}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà} \\ \text{trasposte}}}{B^t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà} \\ \text{trasposte}}}{A^t} = (AB)^t$$

— o — o —

Oss. L'inversa di AB è $B^{-1}A^{-1}$. Infatti

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{\text{Id}} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \text{Id}.$$

Oss. le matrici ortogonali sono invertibili

Achtung! Se moltiplico una matrice ortogonale per un numero diverso da ± 1 , quello che ottengo NON è ortogonale. Anche la somma di due matrici ortogonali in generale non è ortogonale.

— o — o —

PROIEZIONI ORTOGONALI Dato un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sappiamo che

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

e quindi ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in modo unico come

$$v = \underset{\in W}{w_1} + \underset{\in W^\perp}{w_2}$$

Allora

- w_1 è la proiezione ortogonale di v su W
- w_2 " " " " " " " $W^\perp$

Operativamente: scrivo una base di $\mathbb{R}^n$ che sia l'unione di una base di W e una di $W^\perp$, poi prendo le componenti di v rispetto a W o $W^\perp$.

Esempio 1 $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \}$

Base: $\underbrace{(1, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(-2, 0, 1)}_{v_2}$

Base ortogonale: $(1, 1, 0) = w_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (-2, 0, 1) - \frac{-2}{2} (1, 1, 0) \\ = (-2, 0, 1) + (1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

$(1, 1, 0), (-1, 1, 1)$: base ortogonale

Base ortogonale di $\mathbb{R}^3$: $\underbrace{(1, 1, 0)}_{w_1}, \underbrace{(-1, 1, 1)}_{w_2}, \underbrace{(1, -1, 2)}_{w_3}$
Base di W Base di $W^\perp$

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^3$, come calcolo la sua proiezione ^{ortog.} su W ?

Scrivo $v = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$ e poi prendo $c_1 w_1 + c_2 w_2$

In particolare $\text{pr}_W(v) = c_1 w_1 + c_2 w_2$

$$= \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$\nwarrow \nearrow$
 se la base è ortonormale,
 questi sono 1.

Desiderio: avere una matrice che prende in INPUT v (o meglio le sue componenti rispetto alla canonica) e restituisce $\text{pr}_W(v)$ (o meglio le sue componenti)

Chi è questa matrice

1ª possibilità

$$\text{pr}_W(w_1) = w_1$$

$$\text{pr}_W(w_2) = w_2$$

$$\text{pr}_W(w_3) = 0$$

] chi sta sul piano

] rimane se stesso

] chi è $\perp$ al piano va in 0.

$$\begin{array}{l} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(w_1) \ f(w_2) \ f(w_3)$

Matrice che rappresenta la proiezione dalla base $\{w_1, w_2, w_3\}$ in se

2ª possibilità

$$\begin{array}{l} e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(w_1) \ f(w_2) \ f(w_3)$

Matrice che rappresenta la

proiezione dalla base

 $\{w_1, w_2, w_3\}$ alla canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$

Per ottenere la matrice dalla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ in se può essere utile la matrice di cambio di base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice fa il cambio base dalla $\{w_1, w_2, w_3\}$ alla canonica

Se voglio andare dalla canonica alla canonica devo usare

$$M A M^{-1}$$

$\uparrow$ dalla strana alla canonica $\uparrow$ dalla canonica alla strana

oppure

$$B M^{-1}$$

$\uparrow$ strana to canonica $\uparrow$ canonica to strana

Verificare che viene lo stesso risultato!

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 34

Titolo nota

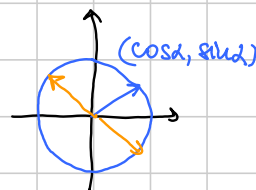
13/11/2014

Come sono fatte tutte le matrici 2×2 ortogonali?

Le colonne devono essere 2 vettori di lunghezza 1 perpendicolari tra di loro.

La prima colonna, avendo norma 1, sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ per un opportuno } \alpha$$



A questo punto ho solo 2 possibilità per la 2ª colonna

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

La seconda possibilità è

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$$

Riassumendo, ci sono solo 2 possibilità

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1$$

Oss. Se cerco la matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$
e impongo $A^t = A^{-1}$ ottengo

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e questo sistema si può gestire, ma meno facilmente.

— o — o —

Esercizio Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che inizia con $(3, 4, 2)$

Idea: prendo una base qualunque che inizia con $(3, 4, 2)$ e uso GS per renderla ortogonale

Base qualunque : $v_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ha $\det = 3$, quindi le righe sono
 $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ una base di $\mathbb{R}^3$.
 $v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortogonalizzo $\{v_1, v_2, v_3\}$: $w_1 = v_1 = (3, 4, 2)$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (0, 1, 0) - \frac{4}{29} (3, 4, 2) \\ = \left(-\frac{12}{29}, \frac{13}{29}, -\frac{8}{29}\right)$$

Posso prendere più comodamente

$$w_2 = (-12, 13, -8)$$

[Verifica: $\langle w_2, w_1 \rangle = -36 + 52 - 16 = 0!$]

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\ = (0, 0, 1) - \frac{2}{29} (3, 4, 2) - \frac{-8}{144 + 169 + 64} (-12, 13, -8) \\ = \text{si fa il conto,}$$

Idea alternativa: produrre w_3 a partire da w_1 e w_2 mediante la formula misteriosa

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 3 & 4 & 2 \\ -12 & 13 & -8 \end{array} \rightsquigarrow w_3 = (-58, 0, 87)$$

Da fare: verificare l'ortogonalità e che venga lo stesso a meno di costanti anche facendo GS,
 — o — o —

Esercizio Ortogonalizzazione

$$\underbrace{(1, 0, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, -1, 0)}_{v_2}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{v_3}$$

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1, -1, 0) - \frac{1}{2} (1, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

Volevo posso prendere $w_2 = (1, -2, -1)$ [verifica: ok]

Prodo w_3 con la formula

* * *

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{matrix} \rightsquigarrow (2, 2, -2)$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{matrix}$$

Volevo posso prendere $w_3 = (1, 1, -1)$ [verifica ok]

$$w_1 = (1, 0, 1) \quad w_2 = (1, -2, -1) \quad w_3 = (1, 1, -1)$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Matrice ortogonale (le righe sono ortonormali)

↓
sono una base
ortonormale di $\mathbb{R}^3$

L'inversa della matrice scritta è la trasposta.

Se invece voglio l'inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi per avere l'inversa basta dividere la 1ª riga per 2, la 2ª per 6 e la 3ª per 3.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -2/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Provare a verificare.

Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$f(1, 0, 1) = (2, 1, 0)$$

$$f(1, -2, -1) = (1, 1, 1)$$

$$f(1, 1, -1) = (3, 1, 1)$$

Fatto: esiste ed è unica perché in partenza ho una base.

Per trovare la matrice dalla canonica alla canonica posso

- metodo bonino, oppure
- cambio di base:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Applicazione f
strano to canonica

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -2/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Cambio base
canonica to strana

una è l'inversa
dell'altra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

← cambio di base strana → canonica

Se ho solo 2 condizioni:

$$f(1, 0, 1) = (3, 1, 4)$$

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

In questo caso avrei esistenza ma non unicità. Infatti posso completare la base aggiungendo $(0, 0, 1)$ e mandare $(0, 0, 1)$ dove mi pare, cioè $f(0, 0, 1) = (a, b, c)$.

Quindi ho infinite soluzioni che dipendono da 3 parametri.

Come sono fatte le matrici corrispondenti?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 4 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Verificare che con il metodo bonino venga lo stesso risultato.

Tutto questo funziona perché i 2 vettori in parentesi nelle condizioni date sono lin. indip., quindi li mando dove mi pare.

Se le cond. erano

$$\neq (1, 1, 0) = (3, 1, 1)$$

$\neq (2, 2, 0) \rightarrow (6, 2, 2)$, allora la condizione non serve a niente, e la posso buttare via
 $\rightarrow (3, 5, 7)$, allora è incoerente con la precedente e non ci sono soluzioni

avrei infinite soluzioni dipendenti da 6 parametri

Se metto 3 condizioni in $\mathbb{R}^3$, può non esistere o non essere unica?

Sì, se i 3 vettori in parentesi non sono lin. indip.

Anzi in questo caso

$\rightarrow$ o non esiste

$\rightarrow$ oppure se esiste non è unica.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 35

Titolo nota

19/11/2014

FORME CANONICHE

Idea base: data un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ e date basi in partenza ed arrivo, è possibile associare ad f una matrice A .

Domande:

- ① Se cambio le basi in partenza ed arrivo, come cambia la matrice?
- ② Se scelgo bene le basi in partenza ed arrivo, posso fare in modo che la matrice A sia particolarmente semplice (ad esempio con tanti zeri)?

Risposta alla ①. Sia A la matrice associata ad f con in partenza la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed in arrivo la base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W ($A \in M_{m \times n}$).

Sia $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una nuova base di V e sia $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ una nuova base di W . Allora tra queste due nuove basi la matrice di f è

$$B = \underbrace{M^{-1}}_{\text{vecchia} \rightarrow \text{nuova in } V} A \underbrace{N}_{\text{nuova} \rightarrow \text{vecchia in } W}$$

dove

- N è la matrice che ha come colonne le componenti di $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ (nuova $\rightarrow$ vecchia)
- M è la matrice che ha come colonne le componenti di $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ rispetto alla base $\{w_1, \dots, w_m\}$ (nuova $\rightarrow$ vecchia)

Teorema (risposta alla ②) Data $f: V \rightarrow W$, esistono una base di V ed una base di W rispetto alle quali la matrice associata ad f ha la seguente forma

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & & 0 \\ 0 & & 0 \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$n = \dim V$

$$r = \text{rank} = \dim(\text{Im})$$

Oss. Dedito in termini di matrici, il te. precedente ci dice che per ogni $A \in M_{m \times n}$ di rango r esistono una matrice $N \in M_{m \times n}$ ed $M \in M_{m \times m}$ invertibili tali che

$$M^{-1} A N$$

ha la forma semplice scritta sopra.

Dim. $\dim V = n$, $\dim(\text{Im}) = r$, quindi $\dim(\ker) = n - r$.

Scelgo una base $\underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{n-r \text{ vettori}}$ di $\ker(f)$

La completo ad una base di V aggiungendo r vettori $v_1, \dots, v_r$.

Pongo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$. Per fatti precedenti questi vettori sono lin. indep. e sono r . Quindi li posso completare ad una base di W aggiungendo $w_{r+1}, \dots, w_m$.

Alla fine di questa costruzione ho una base

$$v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n \quad \text{di } V$$

e una base

$$w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m \quad \text{di } W.$$

In questa base la matrice di f è

$$\begin{array}{l} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \ f(v_2) \dots f(v_{r+1}) \dots f(v_n)$

cioè è la matrice che cercavo.

— 0 — 0 —

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima riga è uguale alla terza, e la 1ª e la 2ª sono lin. indep., si ha che

$$\text{rango}(A) = 2$$

Allora posso trovare M 3×3 ed una matrice N 4×4 invertibili tali che

$$M^{-1} A N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare M ed N seguo il teorema. Devo partire con una base del ker.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 3w = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2w = 0 \\ \text{uguale alla 1a} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 2z + 3w = 0 \\ 3y + 5w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$w = t \quad y = -t \quad z = s \quad x = -\frac{1}{2}(3y + 2z + 3w) = -\frac{1}{2}(-3t + 2s + 3t) = -s$$

$$(x, y, z, w) = (-s, -t, s, t) = s(-1, 0, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$$

$\uparrow$ v_3 base di ker f $\uparrow$ v_4

La completo ad una base di V aggiungendo

$$v_1 = (1, 0, 0, 0) \quad v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

Sarà vero che è una base di V ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N$$

Si vede subito che N è invertibile ($\det N \neq 0$) perché è triangolare superiore e sulla diag. sono tutti $\neq 0$.

Pongo $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$, cioè

$$w_1 = (2, 3, 2), \quad w_2 = (3, 2, 3)$$

e la completo ad una base di W aggiungendo $w_3 = (1, 0, 0)$.
Sarà vero che è una base di W ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$\det M \neq 0$, quindi è invertibile.

Se facessi il conto, vedrei che

$$M^{-1} A N$$

ha proprio la forma desiderata (2 uni ed il resto zeri).

Esempio 2 Prendiamo una seconda matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \cdot 1^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga} \Rightarrow \text{rank}(B) = 2$$

Poiché $\text{rank}(B) = 2$, anche questa B ha la stessa forma canonica C di prima.

Dico che esistono $M \in M_{3 \times 3}$ ed $N \in M_{4 \times 4}$ invertibili tali che

$$B = M^{-1} A N$$

cioè posso passare dalla A dell'esercizio precedente alla B di questo esercizio.

Come trovo questa M e questa N ? In 2 passaggi.

① Trovo M_A ed N_A t.c.

$$C = M_A^{-1} A N_A$$

$\uparrow$ matrice in forma canonica $\uparrow$ 2 matrici dell'esercizio precedente

② Allo stesso modo posso trovare M_B ed N_B t.c.

$$C = M_B^{-1} B N_B$$

$\uparrow$ stesso di sopra $\uparrow$ le trovo con procedimento analogo $\uparrow$

Ora ricavo B :

$$B = M_B C N_B^{-1} = \boxed{M_B M_A^{-1}} \boxed{A N_A N_B^{-1}}$$

$\downarrow$ M^{-1} $\downarrow$ A $\downarrow$ N

Così ho scritto B come volevo. [Fare il conto in questo esempio!]

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 36

Titolo nota

19/11/2014

Forme canoniche nel caso di $f: V \rightarrow V$

Domanda: come posso scegliere una base $v_1, \dots, v_n$ di V in modo che la matrice di f , usando quella base sia in partenza sia in arrivo, sia particolarmente semplice.

In termini di matrici, sia $A \in M_{n \times n}$ che rappresenta f in una data base di V . Cerco $M \in M_{n \times n}$ invertibile tale che

$$M^{-1} A M$$

← stesso cambio di base in partenza ed arrivo.

sia particolarmente semplice

Def. Due matrici A e B si dicono simili (matrici $n \times n$) se esiste $M \in M_{n \times n}$ invertibile t.c.

$$B = M^{-1} A M$$

Moralmente, due matrici simili rappresentano la stessa applicazione, solo in basi diverse.

Esempio motivazionale $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{2014} .

Attualmente l'unico modo di farlo è di calcolare tutte le potenze intermedie...

Altro problema: trovare una matrice B tale che $B^2 = A$.

Oss. Se A fosse diagonale sarebbe tutto semplice

Obiettivo: cercare se possibile di rendere A diagonale.

Cosa vuol dire se una certa applicazione è rappresentata da una matrice diagonale in una certa base $v_1, \dots, v_n$?

$$\begin{array}{l} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

$$\left. \begin{array}{l} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ f(v_3) = \lambda_3 v_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_1, v_2, v_3 \text{ vanno} \\ \text{in multipli di} \\ \text{se stessi} \end{array}$$

Def. Sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare.

- ① Si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se esiste $v \neq 0$ tale che

$$f(v) = \lambda v \quad (v \text{ va in } \lambda \text{ volte se stesso})$$

- ② Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f si dicono autovettori corrispondenti tutti i vettori $v \neq 0$, $v \in V$, per cui vale la relazione di sopra

- ③ Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore, si dice autospatio di λ l'insieme degli autovettori corrispondenti e dello 0.

Oss. La restrizione $v \neq 0$ è essenziale, altrimenti se potessi usare $v = 0$ qualunque λ sarebbe autovalore.

Oss. L'autospazio relativo ad un certo λ è un sottospazio vettoriale

Dilu Somma Se v_1 e v_2 stanno nell'autospazio, cioè

$$f(v_1) = \lambda v_1 \quad f(v_2) = \lambda v_2$$

allora

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \\ &= \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \end{aligned}$$

Prodotto Se v sta nell'autospazio, cioè $f(v) = \lambda v$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v). \quad \square$$

Domanda: come trovo gli autovalori e gli autovettori?

Risposta: sia A la matrice che rappresenta f .

Allora

$$\lambda \text{ è autovalore} \Leftrightarrow \text{Det}(A - \lambda \overset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice identica}}}{\text{Id}}) = 0$$

Dim. λ è autovalore $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$ b.c. $Av = \lambda v$

$$\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \text{ b.c. } Av - \lambda v = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \text{ b.c. } (A - \lambda \text{Id})v = 0$$

$$\Leftrightarrow v \neq 0 \text{ e } v \in \ker(A - \lambda \text{Id})$$

$$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \text{ (contiene } v \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = 0. \quad \square$$

corretto dopo video

A questo punto l'autospazio relativo a λ è il $\ker$ di $A - \lambda \text{Id}$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vediamo se esistono autovalori/vettori

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Quindi $\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$ oppure $\boxed{\lambda = 3}$

autovalori

Calcolo gli autospazi. $\boxed{\lambda = 2}$ Cerco i vettori che vanno in 2 volte se stessi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y = 0 \\ \boxed{2x + 2y = 0} \end{cases}$$

è uguale alla prima: DEVE succedere

L'autospazio è $\text{Span} \{ \boxed{(1, -1)} \}$

possibile autovettore

$$\boxed{\lambda=3} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \leftarrow \text{Deve succedere}$$

Autospazio = Span $\{ (1, -2) \}$

Riassumendo: ci sono 2 autovalori

$\lambda = 2$ con autovettore con. $(1, -1) = v_1$

$$x=3 \quad , \quad , \quad , \quad (1, -2) = \sigma_2$$

Altro modo di calcolare gli autospazi è fare il $\ker$ di $A - \lambda I$

$$\boxed{\lambda=2} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 3} \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

È equivalente a saltare un passaggio nel sistema.

Fatto importante : nella base $\{v_1, v_2\}$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Detto altrimenti, posto

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha che $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Verifica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Gran finale

$$M^{-1} A M = D \quad \text{oppure} \quad A = M D M^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = (M D M^{-1}) (M D M^{-1}) = M D^2 M^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = M D^2 \underbrace{M^{-1} M}_I D M^{-1} = M D^3 M^{-1}$$

A questo punto per induzione $A^k = M D^k M^{-1}$
 e in particolare $A^{2014} = M D^{2014} M^{-1}$

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 \\ 0 & 3^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto il gioco è fatto.

Se voglio una matrice B t.c. $B^{22} = A$, basta prendere

$$B = M \begin{pmatrix} \sqrt[22]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[22]{3} \end{pmatrix} M^{-1}$$

La verifica è la stessa di sopra.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 37

Titolo nota

19/11/2014

Problema delle forme canoniche (con la stessa base in partenza ed arrivo)

Data $A \in M_{n \times n}$, trovare $M \in M_{n \times n}$ invertibile t.c.

$$M^{-1} A M \leftarrow \text{matrice simile ad } A$$

sia particolarmente semplice.

Detto altrimenti: trovare una matrice simile ad A che sia semplice.

Def. Una matrice $A \in M_{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale.

Proprietà matrici simili

(1) Se A_1 è simile ad A_2 , allora $\det(A_1) = \det(A_2)$

(2) Se A_1 è simile ad A_2 , e B_1 è simile a B_2 (con la stessa M), allora

$A_1 + B_1$ è simile a $A_2 + B_2$] *cometto dopo video*

$A_1 \cdot B_1$ è simile a $A_2 \cdot B_2$

(3) Se A_1 è simile ad A_2 , allora A_1^k è simile a A_2^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dim. (1) $A_2 = M^{-1} A_1 M$. Allora per Binet

$$\det A_2 = \det M^{-1} \cdot \det A_1 \cdot \cancel{\det M} = \det A_1$$

$\frac{1}{\det M}$

$$(2) \quad A_2 = M^{-1} A_1 M \quad B_2 = M^{-1} B_1 M$$

$$A_2 + B_2 = M^{-1} A_1 M + M^{-1} B_1 M = M^{-1} (A_1 + B_1) M$$

$$A_2 \cdot B_2 = M^{-1} A_1 \underbrace{M \cdot M^{-1}}_{\text{si semplificano perché sono a contatto}} B_1 M = M^{-1} (A_1 B_1) M$$

(3) Inclusione a partire dal pto (2).

Def. Data $A \in M_{n \times n}$, si dice polinomio caratteristico di A il polinomio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$$

Fatto importante

(1) Se A è simile a B , allora $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

(2) Se A è diagonale, allora

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i numeri che compaiono sulla diag. di A

(3) Stessa cosa per le triangolari superiori

Dim. (1) Se $B = M^{-1} A M$, allora

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \text{Id}) = \det(M^{-1} A M - \lambda \overbrace{M^{-1} M}^{\text{Id}}) \\ &= \det[M^{-1} (A - \lambda \text{Id}) M] \end{aligned}$$

$$= \cancel{\det M^{-1}} \cdot \det(A - \lambda \text{Id}) \cdot \cancel{\det M} = \det(A - \lambda \text{Id}) = p_A(\lambda)$$

(2) Se A è diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \lambda_2 - \lambda & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi } p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

(3) Se A è triangolare superiore, il discorso è analogo.

— 0 — 0 —

Conseguenza dei fatti (1) e (2): se A è diagonalizzabile, allora il suo pol. caratteristico $p_A(\lambda)$ è lo stesso della matrice diagonale finale, quindi si può scrivere come prodotto di fattori di 1° grado, a coeff. reali. In particolare, $p_A(\lambda)$ ha n radici reali, eventualmente contate con molteplicità.

Quindi: se $p_A(\lambda)$ ha almeno una radice che non sta in $\mathbb{R}$, allora addio diagonalizzabilità.

Def. Sia $p(x)$ un polinomio

- Si dice che α è una radice di $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$.

Questo implica che $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$

- Si dice molteplicità della radice α il più grande intero m tale che $(x - \alpha)^m$ divide $p(x)$

Fatto generale (misterioso) Ogni polinomio $p(x)$ a coeff. reali o complessi ha esattamente n radici complesse se contate con molteplicità, cioè si può scrivere nella forma

$$p(x) = c(x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici reali o complesse di $p(x)$.

Se un fattore è ripetuto k volte, allora la radice ha molteplicità k .

Def. Sia $A \in M_{n \times n}$ e sia λ un suo autovalore, che è una radice di $p_A(\lambda)$.

Si definisce

- MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ la sua molteplicità come radice di $p_A(\lambda)$
- MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ la dimensione dell'autospazio cioè $\dim(\ker(A - \lambda Id))$

Data una matrice A , come trovo gli autovalori? Come trovo le molteplicità algebrica e geometrica?

Matrice $A \rightsquigarrow p_A(\lambda) \rightsquigarrow$ trovo le radici e ho gli autovalori
 $\rightsquigarrow$ scomponendo $p_A(\lambda)$ ho le molt. algebriche
 $\rightsquigarrow$ guardando $A - \lambda Id$ ho le molt. geometriche.

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Autovalori: 1, 7, 9

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(7-\lambda)(9-\lambda)$$

↑ ↑ ↑
fattori singoli $\Rightarrow$ molt. alg. = 1

Per le molt. geometriche calcolo $A - \lambda Id$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 2 \Rightarrow \dim \ker = 3 - 2 = 1$$

$$A - 7Id = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 2 \Rightarrow \dim \ker = 3 - 2 = 1$$

$$A - 9Id = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

" " "

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(7-\lambda)^2$$

autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 7$

↑ ↑
molt. alg. = 1 molt. alg. = 2

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 2 \rightsquigarrow \text{molt. geom.} = 1$$

$$A - 7Id = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} = 2 \rightsquigarrow \text{molt. geom.} = 1$$

Teorema Per ogni autovettore si ha che

$$1 \leq \text{mult. geom.} \leq \text{mult. alg.}$$

Conseguenza: se $\text{mult. alg.} = 1$, allora $\text{mult. geom.} = 1$.

Dim. Sia g la molteplicità geometrica. Vuol dire che l'autospazio ha dimensione g , cioè esistono $v_1, \dots, v_g$ lin. indip. tali che

$$f(v_1) = \lambda v_1, \dots, f(v_g) = \lambda v_g \quad (\text{stesso } \lambda).$$

Completo questi ad una base di V aggiungendo $v_{g+1}, \dots, v_n$. In questa nuova base la matrice A diventa

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \lambda_1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & * & c \end{pmatrix} \quad B - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & & \\ & \lambda_1 - \lambda & & & \\ & 0 & & & \\ & & \lambda_1 - \lambda & & \\ & 0 & & & c - \lambda \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_g)$

il resto non so nulla

$$\text{Ora } p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \text{Det}(B - \lambda \text{Id}) = (\lambda_1 - \lambda)^g \cdot \text{Det}(c - \lambda \text{Id})$$

Questo fatto dice che la radice $\lambda = \lambda_1$ ha molteplicità almeno g , quindi $\text{mult. alg.} \geq \text{mult. geom.}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 38

Titolo nota

21/11/2014

Continuazione formule canoniche

Fatti importanti sui polinomi

Sia

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

un polinomio.

- (1) Se $a_0, \dots, a_n$ sono numeri complessi, allora esistono esattamente n radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (eventualmente ripetute) e

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

(un pol. di grado n
ha al max n
radici complesse
distinte)

cioè si scrive come prodotto di fattori di 1° grado

- (2) Il prodotto delle radici è $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

- (3) La somma delle radici è $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

"Dim"

- (1) Teorema fondamentale dell'algebra (la parte difficile è dimostrare che c'è almeno una radice).

Una volta che c'è una radice α , si divide per $x - \alpha$ e si procede per induzione.

- (2) Supponiamo di aver diviso per a_n , in modo che il polinomio diventi MONICO, cioè x^n ha coeff. = 1. Allora

$$[n=2] \quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\text{somma}} x + \underbrace{\alpha_1 \cdot \alpha_2}_{\text{prodotto}}$$

$$[n=3] \quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}_{\text{somma}} x^2 + \dots x - \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\text{prodotto}}$$

e così via per induzione. $\square$

Esempi

$$x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\text{Somma} = 2 \quad \text{Prodotto} = 6$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\text{Somma} = \frac{2}{5} \quad \text{Prodotto} = \frac{6}{5}$$

$$5x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{Somma} = -\frac{3}{5} \quad \text{Prodotto} = -\frac{1}{5}$$

↑
cambio segno
sempre

↑
cambio segno
perché grado ≥ 3

Oss. Si tratta sempre di somma e prodotto di radici COMPLESSE
e le radici di molteplicità m contano m volte.

— 0 — 0 —

Proprietà del polinomio caratteristico Sia $A \in M_{n \times n}$ una matrice,
e sia

$$p_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda \text{Id})$$

il suo polinomio caratteristico.

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(2) Le radici del polinomio caratteristico sono gli autovalori di A .

(quindi una matrice ha al max n autovalori complessi, e ne ha esattamente n se contati con molteplicità. Due matrici simili hanno per forza gli stessi autovalori)

(3) grado $(p_A(\lambda)) = n$ e il coeff. di λ^n è $(-1)^n$

(4) Il termine noto del polinomio caratteristico è $\text{Det}(A)$

(conseguenza: $\text{Det } A = \text{prodotto degli autovalori di } A$)

(5) Il coeff. di λ^{n-1} è $(-1)^{n+1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$
somma degli elementi sulla
diagonale di A

(conseguenza: due matrici simili hanno la stessa somma degli
elementi sulla diagonale).

Def. Data una matrice quadrata $n \times n$ si definisce TRACCIA di A
la somma degli elementi sulla diagonale

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Fatti da ricordare

- ① Due matrici simili hanno :
- stesso pol. caratteristico
 - stessi autovalori
 - stesso Det
 - stessa traccia
- ② $\text{Det } A = \text{prodotto degli autovalori}$
- ③ $\text{Tr}(A) = \text{somma autovalori}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} = 7 \quad \text{Det} = 10$$

$$\text{Autovalori: } 2, 5$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Dim. teo. pol. caratt.

- (1) visto lezioni prec.
- (2) " " "

$$(3) \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Il termine di grado max viene fuori quando prendo

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) \dots (a_{nn}-\lambda)$$

e a sua volta λ^n avrà coeff. $(-1)^n$

$$(4) \text{ termine noto} = p_A(0) = \text{Det}(A - 0 \cdot \text{Id}) = \text{Det } A$$

$$[\text{Conseguenza} \quad \text{prodotto autovalori} = (-1)^n \frac{\text{termine noto}}{\text{coeff di } \lambda^n} = \frac{(-1)^n \text{Det } A}{(-1)^n}]$$

↑
fatto gen.
sui polinomi

Applico A:

$$A (c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = 0$$

$$= \boxed{c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m = 0}$$

Ma allora

$$2^a - \lambda_1 \cdot 1^a = c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + c_m (\lambda_m - \lambda_1) v_m = 0$$

ed è più corta delle precedenti.

Poiché i λ_i sono diversi i coeff. non sono tutti nulli,
 — 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 39

Titolo nota

21/11/2014

Forme canoniche : $\rightarrow$ Diagonalizzazione
 $\rightarrow$ Forma di JORDAN

Problema : data $A \in M_{n \times n}$, vedere se A è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste M invertibile f.c.

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{diagonale}$$

Teorema $\uparrow$ È possibile diagonalizzare A se e solo se tutti gli autovalori di A sono reali e hanno molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica.
 (Diagonalizzazione se e solo se)

Corollario (Condizione sufficiente alla diagonalizzazione)

Se tutti gli autovalori sono reali e distinti, allora è diagonalizzabile,

Dim. Per un lemma precedente sappiamo che

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad (m_g = \text{mult. geom.}, m_a = \dots \text{algebraica})$$

per ogni autovalore λ . Se tutte le $m_a(\lambda) = 1$, allora anche $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$ per ogni autovalore. Quindi per il teorema A è diagonalizzabile.

Esempio banale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A \text{ è diagonalizzabile}$$

Essendo triang. superiore, gli autovalori sono 1, 3, 7 e sono distinti. Per esercizio trovare la M che diagonalizza, che ha come colonne gli autovettori.

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = A$

A è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

Gli autovalori sono numeri complessi non reali, quindi

→ non è diagonalizzabile sui reali

→ è diagonalizzabile sui complessi, cioè esiste una matrice M di numeri complessi tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

le colonne di M sono gli autovettori complessi di A, che trovo risolvendo

$$A v = (2+3i) v$$

$$A v = (2-3i) v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+3i)x \\ (2+3i)y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - 2y = (2+3i)x \\ 5x + 3y = (2+3i)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(-1-3i) - 2y = 0 \\ 5x + (1-3i)y = 0 \end{cases} \quad \text{Oss.} \quad \begin{pmatrix} -1-3i & -2 \\ 5 & 1-3i \end{pmatrix} \text{ ha } \det = 0$$

Basta prendere $x = -2, y = (1+3i)$ e ho una soluzione

Adesso dovrei risolvere il sistema con $2-3i$. Si può o fare il conto, o vedere che è il coniugato: $x = -2, y = 1-3i$

Morale:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1+3i & 1-3i \end{pmatrix} \quad \text{Provare a sostituire,}$$

Oss. Se A è una matrice a coeff. reali, λ è un autovalore complesso e v è un autovettore corrispondente, allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore e $\bar{v}$ è un autovettore corrispondente.

Dim. $Av = \lambda v$ Faccio il coniugato a dx e sx

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} \leadsto \overline{A} \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v} \leadsto A\bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

$\uparrow$ coniugato prodotto $\uparrow$ A è reale
 $=$ prodotto dei coniugati

— o — o —

Cosa succede quando non è diagonalizzabile? Formula di JORDAN

Def. Un blocco di JORDAN di dim k e autovalore λ è una matrice $k \times k$ che ha

- tutti λ sulla diagonale
- tutti 1 sopra la diagonale
- tutti 0 altrove

Esempi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ $\lambda = 7$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$

Def. Una matrice di JORDAN è una matrice che ha

- tutti blocchi di JORDAN sulla diagonale, con λ uguali o diversi,
- tutti 0 altrove

Oss. Una matrice diagonale è una matrice di JORDAN con tutti blocchi da 1×1 ,

Esempi

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema misterioso Ogni matrice a coeff. complessi è simile ad una matrice di Jordan. Inoltre

- i numeri che compaiono sulla diagonale sono gli autovalori con molteplicità (ogni autovalore compare una volta)
- il numero dei blocchi relativi ad un dato autovalore è la sua molteplicità geometrica. (quindi se $m_a = n$ ho tutti blocchi da 1×1)

— o — o —

Matrice di JORDAN REALE Ci sono 2 tipi di blocchi

- i blocchi classici (λ reale sulla diag., 1 sopra)
- i blocchi costituiti da "mattoni 2×2 "

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Blocco da 3×3 mattoncini con mattoni sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Teorema misterioso Ogni matrice a coeff. reali è simile ad una matrice di Jordan reale. Inoltre

- i numeri che compaiono sulla diagonale dei blocchi classici sono gli eventuali autovalori reali
- i mattoncini $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dei blocchi nuovi corrispondono agli autovalori veramente complessi $a \pm ib$ (compaiono a coppie).

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ è simile a } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 40

Titolo nota

22/11/2014

TEOREMA SPETTRALE

Def. Un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice simmetrica se

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

f "migra nei prodotti scalari"

Def. Una matrice A si dice simmetrica se $A = A^t$.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Oss. In una matrice simmetrica posso mettere quello che voglio sulla diagonale e sopra la diagonale. A quel p.to sotto devo copiare

Quindi: una matrice $n \times n$ simmetrica dipende da $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri

Dim. 1° modo: posso fissare liberamente

$$\overset{\substack{\uparrow \\ \text{1ª riga}}}{n} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{2ª riga}}}{(n-1)} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ultima riga}}}{(1-3)} + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

2° modo: posso fissare liberamente la diagonale $\leadsto n$ parametri
metà dei rimanenti elementi $\leadsto \frac{n^2-n}{2}$

$$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

— 0 — 0 —

Proposizione L'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale (ovvio, anzi è un sottospazio di $M_{n \times n}$) di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$

Oss. In termini di elementi: $A = A^t$ se e solo se $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni i e j tra 1 ed n .
— o — o —

Proposizione Una applicazione lineare è simmetrica se e solo se la matrice ad essa associata (rispetto ad una qualunque base ortonormale) è una matrice simmetrica.

Dim. Servono 2 implicazioni.

1ª implicazione: se f è simmetrica e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, allora la matrice A è simmetrica.

Fatto fondamentale: $a_{i,j} = \langle f(v_j), v_i \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \leftarrow v_1 & \leftarrow v_2 & \leftarrow v_n \\ | & | & | \\ \hline & a_{i,j} & \\ \hline | & | & | \\ \uparrow f(v_1) & \uparrow f(v_j) & \uparrow f(v_n) \end{pmatrix}$$

↑
colonna
j-esima

↑
selezionare
la componente
i

Se f è simmetrica, cioè migra nei prodotti scalari, allora

$$a_{i,j} = \langle f(v_j), v_i \rangle = \langle v_j, f(v_i) \rangle = a_{j,i}$$

e quindi la matrice è simmetrica.

Il fatto che la base sia ortonormale serve per dire che

$$\langle f(v_j), v_i \rangle = i\text{-esimo elemento della } j\text{-esima colonna}$$

2ª implicazione Se A è simmetrica e rappresenta f rispetto ad una base ortonormale, allora f è simmetrica.

Parenthesi : fare il prodotto scalare tra u e v è equivalente a fare

$$x^t \cdot y$$

dove x e y sono i vettori colonna delle componenti di u e v .

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

x

$$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

y

$$x^t \cdot y = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Se la matrice A è simmetrica

$$\langle f(u), v \rangle = (Ax)^t \cdot y = x^t A^t y \underset{A \text{ è simm.}}{=} x^t A y = \langle u, f(v) \rangle$$

x componenti di u , Ax componenti di $f(u)$

y componenti di v , Ay componenti di $f(v)$.

— o — o —

Teorema spettrale (Versione con le applicazioni)

Un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è simmetrica se e solo se esiste una base ortonormale di autovettori.

Teorema spettrale (Versione con le matrici)

Una matrice A è simmetrica se e solo se è diagonalizzabile mediante una matrice M ortogonale, cioè se e solo se esiste M tale che

TUTTO
IN $\mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} M^{-1} A M = D \leftarrow \text{diagonale} \\ M^{-1} = M^t \leftarrow M \text{ è ortogonale, cioè le sue} \right. \\ \left. \text{colonne (e anche le sue righe)} \right. \\ \left. \text{sono ortonormali.} \right]$$

Conseguenza Gli autovalori di una matrice simmetrica sono

- tutti reali
- tutti con molteplicità algebrica = molteplicità geometrica,

1° Fatto semplice Se A si diagonalizza mediante matrice M ortogonale, allora A è simmetrica (metà del 2° enunciato).

Dim. Per ipotesi sappiamo che $M^{-1} A M = D$ e $M^{-1} = M^t$.

Ricavo A :

$$A = M D M^{-1}$$

Ma allora

$$A^t = (M D M^{-1})^t = (M D M^t)^t = \overbrace{(M^t)^t}^{\substack{\uparrow \\ M^{-1} = M^t}} \overbrace{D^t}^{\substack{\uparrow \\ D}} \overbrace{M^t}^{\substack{\uparrow \\ M^{-1}}} = \text{prop. tras. prodotto}$$

$$= M D M^{-1} = A$$

2° fatto semplice Se f è un'applicazione simmetrica e u e v sono autovettori con autovalori distinti, allora $\langle u, v \rangle = 0$.

Dim. Supponiamo che $f(u) = \lambda u$
 $f(v) = \mu v$ con $\lambda \neq \mu$.

Allora:

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \lambda u, v \rangle = \langle f(u), v \rangle && \text{(uso che } f \text{ è simm.)} \\ &= \langle u, f(v) \rangle \\ &= \langle u, \mu v \rangle \\ &= \mu \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo ottengo

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 41

Titolo nota

22/11/2014

Continuazione teorema spettrale.

3° fatto semplice (metà del 1° enunciato) Se esiste una base ortonormale di autovettori, allora f è simmetrica.

Dim. In tale base la matrice associata ad f è diagonale, dunque una matrice simmetrica.

Se la matrice rispetto ad una base ortonormale è simmetrica, allora f è simmetrica (già visto).

— o — o —

Lemma 1 Se f è simmetrica, allora esiste almeno un autovalore reale,

Dim. Di sicuro c'è almeno un autovalore complesso. Indichiamo con λ questo autovalore e con v un corrispondente autovettore, cioè $f(v) = \lambda v$ (anche v è complesso).

Faccendo il coniugato ottengo

$$\overline{f(v)} = f(\bar{v}) = \bar{\lambda} \bar{v}$$

il che dice che anche $\bar{\lambda}$ è un autovalore con autovettore $\bar{v}$.

Allora

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, \bar{v} \rangle &= \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle f(v), \bar{v} \rangle = \langle v, f(\bar{v}) \rangle \\ &= \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{da cui } (\lambda - \bar{\lambda}) \langle v, \bar{v} \rangle = 0$$

$$\text{Se } v = (x_1, \dots, x_n) \text{ allora } \langle v, \bar{v} \rangle = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$$

$$= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \neq 0$$

valore assoluto dei
numeri complessi $x_1, \dots, x_n$

Di conseguenza $\langle v, \bar{v} \rangle \neq 0$, quindi $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Quindi λ è reale.

— o — o —

Lemma 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale tale che

$$f(w) \in V \quad \forall w \in V.$$

(V è un sottospazio che va in sé)

Allora

$$f(w) \in V^\perp \quad \forall w \in V^\perp$$

(Allora anche $V^\perp$ va in sé).

Dim. Sia $w \in V^\perp$ e sia $v \in V$. Allora

$$\langle f(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle = 0$$

$\underbrace{\quad}_{V^\perp} \quad \underbrace{\quad}_{V} \text{ per ipotesi}$

Quindi

$$\langle f(w), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

il che dice che $f(w) \in V^\perp$.

— o — o —

Dim. teo. spettrale (Versione applicativa).

Si fa per induzione sulla dimensione n .
 In dim = 1, non c'è nulla da dimostrare.

Come si passa dalla dim $n-1$ alla di n ?

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dal lemma 1 sappiamo che esiste almeno un autovettore reale λ_1 con autovettore v_1 , che posso sempre supporre di norma 1. Questo è il primo elemento della base.

Ora pongo $V = \text{Span}(v_1)$

Per il lemma 2 so che $V^\perp$ viene mandato in sé, quindi posso pensare f come applicazione

$$f: V^\perp \rightarrow \underbrace{V^\perp}_{\text{dim } n-1}$$

Inoltre f è simmetrica su $V^\perp$ perché lo era in partenza.

Per ipotesi induttiva esiste una base di $V^\perp$ fatta da $n-1$ vettori ortonormali che sono anche autovettori.

Quindi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sono la base richiesta.

base di $V^\perp$ data
dall'ipotesi induttiva

— 0 — 0 —

Oss. Sia f qualunque (lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Sia v_1 un auto-
vettore con autovalore λ_1 .

Completo v_1 ad una base aggiungendo $v_2, \dots, v_n$.

Rispetto a questa base la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & & & \\ | & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad *$$

Sia f simmetrica, v_1 e λ_1 come sopra. Completo v_1 ad una base ortonormale (basta ortogonale). Allora la matrice diventa

$$\begin{array}{l} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ \vdots \\ v_n \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow f(v_2), \dots, f(v_n) \text{ stanno in } V^\perp, \text{ cioè} \\ \text{ nello spazio generato da } v_2, \dots, v_n \\ V = \text{Span}(v_1) \\ V^\perp = \text{Span}(v_2, \dots, v_n) \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad \dots \quad f(v_n)$

— 0 — 0 —

Punto della situazione

① Una matrice A si diagonalizza (sui reali) mediante una
matrice ortogonale $\Leftrightarrow A$ è simmetrica

$\uparrow$ diagonalizzazione di LUSO

② Una matrice A si diagonalizza (sui reali) senza nessuna
richiesta su M (sdo invertibile) $\Leftrightarrow$ gli autovalori sono reali
e hanno mult. alg. = mult. arit.

③ Una matrice A si diagonalizza (sui complessi) senza nessuna richiesta su M (solo invertibile) $\Leftrightarrow$ gli autovalori (complessi) hanno molt. alg. = molt. arit.

④ Una matrice A , anche quando non si diagonalizza, si jordanizza (sui reali o sui complessi).

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ha forma canonica} \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fatto 1 : $\text{rang}(A) = 1$, quindi $\dim(\ker(A)) = 2$

Fatto 2 (fatto generale) $\ker A \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda = 0$ è autovalore
 $v \in \ker A \quad v \neq 0 \Leftrightarrow Av = 0 \cdot v$

Fatto 3 (fatto generale) $\ker A = \text{autospatio dell'autovalore } 0$
 $\ker A = \{v \in V : Av = 0 = 0 \cdot v\}$

Fatto 4 Nell'esempio $\lambda = 0$ è autovalore che ha molt. geom. = 2.
 Essendo $\text{Tr}(A) = 6$, allora il terzo autovalore è $\lambda = 6$.
 Quindi gli autovalori sono

- $\lambda = 0$ con $m_a(0) = m_g(0) = 2$
- $\lambda = 6$ con $m_a(6) = m_g(6) = 1$

Quindi A è diagonalizzabile e la forma canonica è quella scritta, (oss. $p_A(\lambda) = \lambda^2(6-\lambda)$)

Chi è una M che diagonalizza? le sue colonne sono una base di autovettori: v_1, v_2, v_3 tali che

$$Av_1 = 6v_1 \quad \text{ad esempio} \quad v_1 = (1, 1, 1)$$

$$Av_2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} Av_2 = 0 \\ Av_3 = 0 \end{array} \right\} \text{Base del ker} \quad v_2 = (1, -1, 0)$$

$$Av_3 = 0 \quad v_3 = (1, 0, -1)$$

Quindi una M che diagonalizza è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: verificare che $M^{-1}AM = D$

$$\leadsto \text{Det: } 1+1+1 = 3 \neq 0$$

Essendo A simmetrica, si deve per forza diagonalizzare anche con una M ortogonale. Come la trovo?

$$v_1 = (1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, -1, 0) \text{ come prima (è ortogonale al precedente)}$$

$v_3 \leadsto$ modifico con G.S, in maniera da diventare ortogonale a v_2 (e restare ortogonale con v_1)

Concludo ortonormalizzando e usando come colonne per M .

Ho una nuova M ortogonale che diagonalizza.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 42

Titolo nota

22/11/2014

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Trovare la forma canonica e la M di passaggio

- 1° fatto : $\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \dim(\ker(A)) = 4 - 2 = 2$
 $\Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore e $m_g(0) = 2$
- 2° fatto : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = 10$ è autovalore e
 $(1, 1, 1, 1)$ è un con. autovettore
- 3° fatto : $\text{Tr}(A) = 4$, quindi anche $\lambda = -6$ è autovalore.

Quindi gli autovalori sono

- $\lambda = 0$ con $m_g(0) = m_a(0) = 2$
- $\lambda = 10$ con $m_g(10) = m_a(10) = 1$
- $\lambda = -6$ con $m_g(-6) = m_a(-6) = 1$

Forma canonica: $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 10)(\lambda + 6)$

Come trovo una M di passaggio? le colonne devono essere una base di autovettori

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, -1, 1, -1) \leftarrow \text{verificare a mano o trovare risolvendo } Av_2 = -6v_2$$

$$v_3 = (1, 1, -1, -1)$$

$$v_4 = (1, 0, -1, 0)$$

Una possibile M ha v_1, v_2, v_3, v_4 come colonne.

La matrice A è pure simmetrica, quindi deve esistere anche una M ortogonale che diagonalizza.

Sò già che v_1, v_2, v_3 sono ortogonali (autovettori con autovalori diversi). Mi basta cambiare v_4 (lo posso fare con GS oppure con la formula misteriosa in versione $\mathbb{R}^4$).

$$\begin{array}{cccc}
 * & * & * & * \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & -1 & -1
 \end{array} \rightsquigarrow (-1, 1, -1, -1, -\det A_{1,2}, \det A_{1,3}, -\det A_{1,4})$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \quad \text{è simile alla precedente?}$$

Autovalori e pol. caratteristico sono gli stessi, ma non basta per dire che anche questa è diagonalizzabile.

Devo controllare la molteplicità.

È ovvio che per 10 e -6 sono tutte 1.

Per 0 è ovvio che $m_a(0) = 2$, ma

$$m_g(0) = \dim(\ker(B - 0 \text{Id})) = \dim(\ker(B)) = 4 - \text{rang}(B) = 1$$

$$\text{rang} = 3 \text{ perché} \rightarrow \det B_{4,1} \neq 0$$

$$\rightarrow B \text{ è a scala e ha 3 pivot}$$

Quindi B non è diagonalizzabile e la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B non è simile alla A di prima.

↑ blocco di jordan 2×2 con autovalore = 0

Come trovo la M di passaggio? le sue colonne v_1, v_2, v_3, v_4 devono verificare

$$A v_1 = 10 v_1 \quad (v_1 \text{ è autovettore di } 10)$$

$$A v_2 = -6 v_2 \quad (v_2 \text{ " " " } -6)$$

$$A v_3 = 0 \quad (v_3 \text{ è una base del } \ker A)$$

$$A v_4 = v_3 \quad \leftarrow \text{risolvo questa dopo aver trovato } v_3.$$

Esempio 3 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = A$

(1) Per quali valori di a posso diagonalizzare con una matrice ortogonale?

Se e solo se A è simmetrica, cioè se e solo se $a = 3$

(2) Per $A = 3$, chi è la forma canonica?

Sulla diag. finiscono gli autovalori, che so già essere reali

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 7-\lambda \end{pmatrix} \quad \det = 14 - 9\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 20}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2} \quad \begin{pmatrix} \frac{9+\sqrt{61}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9-\sqrt{61}}{2} \end{pmatrix}$$

(3) Per quali a si ha che $\ker A \neq \{0\}$?

$$\Leftrightarrow \text{rank}(A) < 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow 14 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{14}{3}$$

(4) Per quali a è diagonalizzabile sui reali?

Calcolo il polinomio caratteristico $\begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ 3 & 7-\lambda \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 - 3a$$

Senza autovalori reali, quindi $\Delta \geq 0$ $\Delta = 81 - 56 + 12a$
 $= 12a + 25$

- Se $\Delta > 0$, allora gli autovalori sono reali e distinti, quindi di sicuro è diagonalizzabile ($a > -\frac{25}{12}$)
- Se $\Delta < 0$, allora gli autovalori sono complessi (veramente), quindi è diagonalizzabile sui complessi, ma non sui reali
- Se $\Delta = 0$, allora c'è un unico autovalore con $\mu_a = 2$ e tutto dipende da μ_g . lo faccio a mano: $a = -\frac{25}{12}$

$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{25}{12} \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ l'autovalore è $\frac{9}{2}$ (metà della traccia)

$$\mu_g\left(\frac{9}{2}\right) = \dim(\ker(A - \frac{9}{2} \text{Id}))$$

$$A - \frac{9}{2} \text{Id} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{25}{12} \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Rango} = 1 \leadsto \mu_g = 1$$

Quindi per $a = -\frac{25}{12}$ la matrice A non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$, e la sua forma canonica è

$$\begin{pmatrix} +\frac{9}{2} & 1 \\ 0 & +\frac{9}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jordan } 2 \times 2 \text{ con autovalore } \frac{9}{2}$$

Come puoi trovare la base jordanizzante (o la M di passaggio?)

Risolvere:

$$Av_1 = +\frac{9}{2} v_1 \quad (v_1 \text{ è autovettore di } +\frac{9}{2}) \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2}, -3 \\ 5, -6 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = +\frac{9}{2} v_2 + v_1 \quad (\text{dalla seconda colonna della matrice})$$

Fare il conto per verifica.

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 43

Titolo nota

26/11/2014

FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di secondo grado nelle n variabili

Esempi $[n=2]$ $q(x,y) = 3x^2 + 7y^2 + 5xy$
 2 variabili

Più in generale sono tutti gli oggetti del tipo

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

$[n=3]$ La forma generale sarà

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$$

Esercizio Da quanti parametri dipende una forma in dimensione n ?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{termini} \\ \text{puri}}}{n} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{termini} \\ \text{misti}}}{\binom{n}{2}} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA FORMA QUADRATICA

Ad ogni forma quadratica si associa una matrice A simmetrica tale che

$$q(v) = v^t A v$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 vettore con n componenti matrice $n \times n$ simmetrica

Come è fatta la matrice?

→ Sulla diagonale al posto $a_{i,i}$ c'è il coeff. di x_i^2

→ Fuori dalla diagonale al posto $a_{i,j}$ (con $i \neq j$) c'è META del coeff. di $x_i x_j$.

Esempi $q(x,y) = 3x^2 + 5y^2 + 4xy$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Verifica $(x \ y) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+5y \end{pmatrix} = 3x^2 + \boxed{2xy + 2yx} + 5y^2$$

$\downarrow$
 $4xy$

$$q(x,y,z) = x^2 - 6z^2 + 3xy + 5yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$\downarrow$
 $x \quad y \quad z$

— 0 — 0 —

Domanda: quando sostituisco dei numeri alle variabili, ottengo quantità positive o negative?

Def. Sia $q(v)$ una forma quadratica. Si dice che $q(v)$ è

- definita positiva se $q(v) > 0$ per ogni $v \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(v) \geq 0$ per ogni v
- definita negativa se $q(v) < 0$ per ogni $v \neq 0$
- semidefinita negativa se $q(v) \leq 0$ per ogni v
- non definita o indefinita se esiste v_1 t.c. $q(v_1) > 0$ ed esiste v_2 t.c. $q(v_2) < 0$.

Oss. Per dimostrare che una forma è indefinita basta trovare due vettori v_1 e v_2 tali che $q(v_1)$ e $q(v_2)$ hanno segno diverso.

— 0 — 0 —

Def. Ad ogni forma quadratica (o analogamente ad ogni matrice simmetrica) è associata una terna di numeri interi (n_+, n_-, n_0) , tutti ≥ 0 , tali che

$$n_+ + n_- + n_0 = n \quad (\text{numero delle variabili})$$

così definiti

- n_+ è la massima dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ su cui la forma è definita positiva
- n_- è la massima ..., definita negativa
- n_0 è definito per differenza (in modo che la somma faccia n).

Questa terna di numeri si dice **SEGNATURA** della forma

— 0 — 0 —

Fatto Una forma quadratica (o una matrice simmetrica) è

- definita positiva se $n_+ = n$ e $n_- = n_0 = 0$
- semidef. positiva se $n_- = 0$
- definita negativa se $n_- = n$ e $n_+ = n_0 = 0$
- semidef. negativa se $n_+ = 0$
- indefinita se $n_+ > 0$ e $n_- > 0$ (n_0 può fare quello che gli pare)

Oss. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

$$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$$

Quindi, se $q(v) > 0$, allora $q(w) > 0$ per ogni $w \in \text{Span}(v)$,
retta per l'orig. generata v

Quindi, se $q(v) > 0$, allora $n_+ \geq 1$ perché
 c'è un sottospazio di dim. ≥ 1 su cui la forma è def. pos.

— 0 — 0 —

Teorema (per ora misterioso) Sia $q(v)$ una forma quadratica e sia A la matrice simmetrica ad essa associata.

Sappiamo dalla teoria delle forme canoniche che A ha n autovalori reali.

Allora

- n_+ è il numero di autovalori > 0 ,
- n_- è il numero di autovalori < 0 ,
- n_0 è il numero di autovalori nulli.

Esempio 1 $q(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$

Si vede ad occhio che

$$q(1, 0) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad n_+ \geq 1$$

$$q(0, 1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad n_- \geq 1$$

Poiché $n_+ + n_- + n_0 = 2$, sappiamo che per forza $n_+ = n_- = 1$ e $n_0 = 0$.

Riprova con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Ci aspettiamo un autovalore > 0 e uno < 0 .

Volendo si calcolano con il polinomio caratteristico, ma in realtà basta guardare il det.

$$\text{Det } A = -2 - \frac{9}{4} < 0, \text{ quindi ho 2 autovalori di segno diverso.}$$

simmetrica

Oss. Per una matrice 2×2 , se $\text{Det} > 0$, allora gli autovalori possono essere $+, +$ oppure $-, -$. Per decidere basta guardare il segno della traccia, che è la somma degli autovalori.

Oss. Data una matrice A simmetrica, si ha

$$n_0 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Det } A = 0$$

$$\text{In tal caso } n_0 = \dim(\text{Ker}) = n - \text{rang}(A)$$

$$\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 44

Titolo nota

26/11/2014

METODI PER TROVARE LA SEGNAZIONE

- ① Segno autovalori
- ② Completamento dei quadrati
- ③ Minori orlati di SYLVESTER
- ④ Metodo di CARTESIO

- ① Segno autovalori: calcolo gli autovalori di A e ne guardo il segno.

Svantaggio: bisogna trovare le radici di un polinomio, e in dim alta può essere un problema

- ② Completamento dei quadrati. Ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni lin. indep. Allora

- il numero di termini con il segno + è n_+
- " " " " " " " - è n_- ,

Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 4xy - 3y^2$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y^2 - 3y^2$$

$$= (x+2y)^2 - 7y^2$$

Un termine con il segno + e un termine con il segno -, quindi $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$

Il fatto che siano espressioni lin. indep. mi impedisce di pensare la scrittura come

$$q(x,y) = (x+2y)^2 - 3y^2 - 4y^2$$

non sono indipendenti, quindi non vale

Esempio 2 $q(x, y) = x^2 + 3xy + 8y^2$

$$= x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 8y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{23}{4}y^2$$

Due termini con il segno + $\Rightarrow$ segnatura $(2, 0, 0)$

Esempio 3 $q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

$$= 2 \left[x^2 + 3xy + 2y^2 \right]$$

$$= 2 \left[x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 \right]$$

$$= 2 \left[\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \right] = 2 \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Segnatura: $(1, 1, 0)$. Come trovo un vettore (x, y) tale che $q(x, y) < 0$?

Solgo $y = 1$ e x in maniera tale che $x + \frac{3}{2}y = 0$, cioè $x = -\frac{3}{2}$,

quindi $(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ oppure $(x, y) = (-3, 2)$

Verifica: $q(-3, 2) = 18 - 36 + 16 = -2$.

Alternativa con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 8 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow \text{autovalori } + \text{ e } -.$$

Esempio 4 $q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 3y^2 + 4xz + 6z^2$

$$= x^2 + 2xy + 4xz - 3y^2 + 6z^2$$

$$= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 3y^2 + 6z^2$$

$$= (x + y + 2z)^2 - 4y^2 + 2z^2 - 4yz$$

$$= (x + y + 2z)^2 - (2y + z)^2 - z^2 + 2z^2$$

In conclusione $q(x,y,z) = (x+y+z)^2 - (y+z)^2 + z^2$

$\Rightarrow$ Segnatura = $(2, 1, 0)$

Esempio 5 $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \rightsquigarrow (1, 0, 1)$

Esempio 6 $q(x,y) = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \rightsquigarrow (1, 1, 0)$

Oss. Quando "non ci sono quadrati", questo è il modo di farli saltare fuori
 $\quad \quad \quad - \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$

③ **SYLVESTER** Si lavora sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -3 - 6 - 6 - 27 + 4 - 1 = -39$$

Scrivo di fila i segni dei determinanti e metto in testa un segno + d'ufficio

$$+ \quad + \quad - \quad -$$

$\underbrace{\quad}_P \quad \underbrace{\quad}_V \quad \underbrace{\quad}_P$

P = permanenza di segno

V = variazione di segno

Allora, se non ho incontrato strada facendo $\text{Det} = 0$

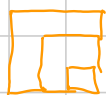
- m_+ = numero di permanenze
- m_- = numero di variazioni
- $m_0 = 0$

Svantaggio: possibilità di trovare zeri strada facendo.

Varianti: quello descritto è Sylvester 1-2-3, ma funziona uguale permutando i 3 numeri.



Sylvester 3-2-1



Sylvester 2-3-1



Esempio $q(x, y, z) = 3y^2 + 6xy - 4yz + 2xz$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sylvester 2-1-3:

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 3$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = -3$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -6 - 6 - 3 = -15$$

Segui:

ufficio
 $\begin{matrix} + & + & - & - \\ \text{P} & \text{V} & \text{P} & \end{matrix}$

Segnatura: (2, 1, 0)

Svantaggio: gli zeri sono un problema
 — 0 — 0 —

④ CARTESIO

Teorema misterioso (di analisi) Sia $p(x)$ un polinomio di grado n con tutte le radici reali. Sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k$$

ultimo termine con coeff. $\neq 0$

Allora

- il numero di radici nulle è uguale a k
- il numero di radici positive è uguale al numero di VARIAZIONI di segno nella successione dei coeff. non nulli
- il numero di radici negative si ottiene per differenza tra il grado e la somma dei primi 2,

Esempio $p(x) = x^5 - x^3$ $m_0 = 3$ (x^3 è il termine di grado + basso)

Successione dei coeff. è $+ \quad -$
 $\quad \quad \quad \text{V}$
 $\pm V \leadsto n_+ = 1$

Per differenza ottengo (1, 1, 3)

Operativamente:

- calcolo il polinomio caratteristico
- stabilisco il segno degli autovalori senza risolvere con Cartesio.

Conclusione:

- Cartesio funziona sempre
- Sylvester può essere più breve quando funziona
- Completamento quadratico dà più informazioni.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 45

Titolo nota

26/11/2014

Vedere in che senso completare i quadrati dà più informazioni

Esempio $q(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6xy$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

① Trovare la segnatura

$$\det A = 4 - 9 = -5 < 0 \Rightarrow \text{autovalori : } +, -$$

$$\Rightarrow \text{segnatura } (1, 1, 0)$$

② Trovare un s.s.p. di dim 1 su cui è positiva

" " " " " -1 su cui è negativa

Completo i quadrati:

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2 - 6xy + 4y^2 \\ &= x^2 - 6xy + 9y^2 - 9y^2 + 4y^2 \\ &= (x-3y)^2 - 5y^2 \end{aligned}$$

Se voglio segno + basta imporre $y=0 \rightsquigarrow \text{Span}\{(1,0)\}$ Se voglio segno - basta imporre $x-3y=0 \rightsquigarrow \text{Span}\{(3,1)\}$ ③ Capire in $\mathbb{R}^2$ il segno della forma quadratica, cioè disegnarla insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : q(x,y) > 0\}$$

$$\begin{aligned} q(x,y) > 0 &\Leftrightarrow (x-3y)^2 - 5y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3y)^2 - (\sqrt{5}y)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3y+\sqrt{5}y)(x-3y-\sqrt{5}y) > 0 \end{aligned}$$

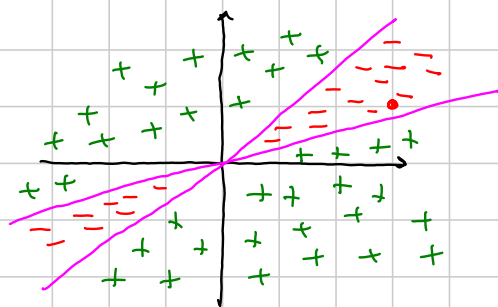
Quindi i 2 fattori devono essere + + oppure - -

Considero le rette

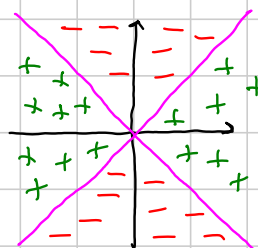
$$x-3y+\sqrt{5}y=0$$

$$x-3y-\sqrt{5}y=0$$

Dalla figura è chiaro che
 → esiste una base di $\mathbb{R}^2$ fatta da vettori verdi ($q > 0$)
 → esiste una base di $\mathbb{R}^2$ fatta da vettori rossi ($q < 0$)
 → esiste una base di $\mathbb{R}^2$ fatta da vettori con $q = 0$



Modello : caso $q(x,y) = x^2 - y^2$



Esempio 2 Consideriamo $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2a yz$ dove a è un parametro.

Studiamo la segnatura al variare di a

Matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. Lo studio con Sylvester 1-2-3

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1, \text{Det}_{2 \times 2} = 2, \text{Det}_{3 \times 3} = -a^2$$

Se $a \neq 0$, allora i segni sono $\underbrace{+}_{+} \underbrace{+}_{+} \underbrace{-}_{-}$, quindi $(2, 1, 0)$

Se $a = 0$, allora la forma diventa $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2$, quindi è già somma di quadrati, quindi segnatura è $(2, 0, 1)$.

Domanda: nel caso $a = 1$, trovare

- un sottospazio di dim. 2 su cui $\tilde{v} > 0$
- un sottospazio di dim. 1 su cui $\tilde{v} < 0$

Per $a = 1$ la forma diventa $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2yz$
 Provo a completare i quadrati:

$$\begin{aligned}
 q(x, y, z) &= x^2 + 2(y^2 + yz) \\
 &= x^2 + 2\left(y^2 + yz + \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right) \\
 &= x^2 + 2\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{2} \quad \leadsto \text{conferma } (2, 1, 0)
 \end{aligned}$$

Volendo un s.sp. di dim. 1 su cui è < 0 imposto l'annullamento dei primi due, quindi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \leadsto \text{Span}(0, 1, -2)$$

Volendo un s.sp. di dim. 2 su cui è > 0 , imposto l'annullamento dell'ultimo, quindi $z = 0 \leadsto \text{Span}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$

Teorema 1 La segnatura è il numero di autovalori positivi, negativi, nulli.

Dim. **1° fatto** Se ho k autovalori positivi, allora ho un s.sp. di dim. k su cui la forma è definita positiva. Basta prendere il sottospazio generato dai relativi autovettori.

Per il teo spettrale esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$$

corrispondono agli autovalori positivi

Se li mettiamo come colonne di una matrice M , la matrice A si diagonalizza

$$M^{-1}AM = D$$

oppure

$$A = MD M^{-1} = MD M^t$$

$\uparrow$
 perché $M^{-1} = M^t$

Prendo un qualunque vettore $v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$.

Cosa succede se faccio $v^t A v$.

Intanto

$$\begin{aligned} A v &= c_1 A v_1 + \dots + c_k A v_k \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k \end{aligned}$$

e quando faccio

$$v^t A v \text{ è come fare } \langle v, A v \rangle =$$

$$= \langle c_1 v_1 + \dots + c_k v_k, c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k \rangle = \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_k c_k^2$$

e questo è > 0 perché $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono > 0 .

2° fatto Se ho k autovalori $>$, e R autovalori $= 0$, allora ho un s.sp. di dim. k su cui la forma è > 0 .
Stessa dim. di sopra

3° fatto Se ho solo k autovalori $>$, allora non posso avere un s.sp. di dim. $\geq k+1$ su cui è > 0 .

Ho k autovalori $>$ e $(n-k)$ autovalori negativi o nulli.

Per il fatto 2 ho un sottospazio W_- di dimensione $n-k$ su cui q è ≤ 0 .

Se V è un s.sp. qualunque di dim. $\geq k+1$, questo per forza interseca W_- , cioè contiene vettori su cui $q \leq 0$.

$$\begin{aligned} \dim(V \cap W) + \underbrace{\dim(V + W)}_{\leq n} &= \underbrace{\dim(V)}_{\geq k+1} + \underbrace{\dim(W)}_{n-k} \\ \downarrow & \\ \text{non può essere } 0 & \text{ perché altrimenti } a \times b \leq n, a \times b \geq n+1 \\ \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} & \end{aligned}$$

Esempio $n=10$ e segnatura $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$ segno autovalori

So che

- esiste s.sp. di dim. $\overset{6}{5}$ su cui $q > 0$ ($n_+ = \overset{6}{5}$)
- esiste un s.sp. di dim. $\overset{6}{5} = 3+2$ su cui $q \leq 0 \rightsquigarrow W$
 $\quad \quad \quad 4 = 3+1$

Se avessi un V di dim ⁷ 6 su cui $q > 0$, questo dovrebbe per forza intersecare W , quindi in V ci sarebbero vettori $v \neq 0$ tali $q(v) \leq 0$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 46

Titolo nota

28/11/2014

POLINOMI E MATRICI

Data una matrice $A \in M_{n \times n}$, ha senso calcolare le potenze A^k , quindi ha senso anche calcolare somme di potenze, tipo

$$2A^3 + 5A^2 + 6A + 8\text{Id} \quad \rightsquigarrow \quad p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

Quindi, dato un qualunque polinomio $p(x)$, ha senso calcolare $p(A)$, che viene a sua volta una matrice $n \times n$.

Domanda 1 Data una matrice A , esistono dei polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$
 $\uparrow$
 matrice nulla

Risposta (semplice) SÌ! Se io considero le matrici $\text{Id}, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$

ho n^2+1 matrici che stanno in uno spazio di dim n^2 , quindi per forza sono lin. dip., cioè esistono dei numeri $c_0, c_1, \dots, c_{n^2}$ tali che

$$c_0\text{Id} + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_{n^2}A^{n^2} = 0 \leftarrow \text{matrice nulla}$$

I coeff sono per ipotesi non tutti nulli.

Ho così trovato un polinomio $p(x)$, di grado $\leq n^2$, che annulla la matrice.

— 0 — 0 —

Oss. Se $p(x)$ è tale che $p(A) = 0$, allora tutti i polinomi che sono multipli di $p(x)$ hanno la stessa proprietà.

— 0 — 0 —

Domanda 2 Data una matrice A , come sono fatti tutti i polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$?

La risposta è non banale ed è data dal seguente

Teorema misterioso Data una matrice $A \in M_{n \times n}$, tra tutti i $p(x)$ con $p(A) = 0$ ce n'è uno di grado più basso. Tutti gli altri sono multipli di questo polinomio di grado più basso.

Def. Data una matrice A , si definisce polinomio minimo $p_m(x)$ il polinomio di grado più basso tale che $p(A) = 0$.

Bisogna sempre fissare in modo che il coeff. del termine di grado max nel $p_m(x)$ sia 1.

Teorema misterioso (HAMILTON - CAYLEY)

Per ogni matrice $A \in M_{n \times n}$, sia $p(x)$ il polinomio caratteristico.

Allora $p(A) = 0$. (cioè se sostituisco A nel pol. caratteristico ottengo 0)

Dim. completamente sbagliata $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$

Se al posto di λ metto A ... $p(A) = \det(A - A) = 0$

Ocdio: se fosse così semplice, funzionerebbe anche con la traccia.

— 0 — 0 —

Conseguenza dei 2 teoremi misteriosi Il polinomio caratteristico, poiché annulla la matrice, deve essere multiplo del polinomio minimo.

Di conseguenza: il polinomio minimo è un divisore del polinomio caratteristico, quindi ha grado $\leq n$.

Proprietà del polinomio minimo

Il polinomio minimo ha

- ① grado $\leq n$
- ② le stesse radici del polinomio caratteristico, solo eventualmente con molteplicità minore od uguale
- ③ la molteplicità di una radice λ come soluzione del polinomio minimo è uguale alla dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a quell'autore,.

Conseguenze

- ① Se tutti gli autovalori sono diversi, allora polinomio minimo = polinomio caratteristico
- ② Se la matrice A è diagonalizzabile, allora tutte le radici del polinomio minimo hanno molteplicità = 1.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{pd. caratt.} = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\text{pd. minimo} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{pd. caratt.} = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\text{pd. minimo} = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

Esempio A matrice 4×4 . Ha come solo autore 2 con $m_A(2) = 4$.
Quali sono le possibili forme canoniche?

- 1 blocco da 4 mg = 1
 - 3 + 1 mg = 2
 - 2 + 2 mg = 2
 - 2 + 1 + 1 mg = 3
 - 1 + 1 + 1 + 1 mg = 4
- } Se $mg = 2$, allora non si decide tra 3+1 o 2+2.
- Per decidere guardo il polinomio minimo! se è $(\lambda-2)^3$ allora è 3+1, se è $(\lambda-2)^2$ allora è 2+2.

Per capire se il polinomio minimo è $(\lambda-2)^2$ oppure $(\lambda-2)^3$, calcolo $A-2Id$ e vedo se facendola al quadrato viene 0. Vediamo il polinomio minimo nei vari casi:

- 4 $p_m(x) = (\lambda-2)^4$
- $3+1$ $p_m(x) = (\lambda-2)^3$
- $2+2$ $p_m(x) = (\lambda-2)^2$
- $2+1+1$ $p_m(x) = (\lambda-2)^2$
- $1+1+1+1$ $p_m(x) = (\lambda-2)$

Esercizio Trovare un caso in cui polinomio caratteristico, polinomio minimo e mg non bastano per decidere la forma canonica.

Esempio Come sono fatte tutte le matrici 3×3 tali che $A^2 = Id$?

La condizione è equivalente a $A^2 - Id = 0$, cioè a dire che il polinomio $x^2 - 1$ annulla la matrice.

Ma allora il polinomio minimo deve essere un divisore di $x^2 - 1$.

Abbiamo 3 casi

- 1° caso: $p_m(x) = (x-1)$, cioè $A - Id = 0$, cioè $A = Id$
- 2° caso: $p_m(x) = (x+1)$, cioè $A + Id = 0$, cioè $A = -Id$
- 3° caso: $p_m(x) = (x^2 - 1) = (x+1)(x-1)$

Poiché sono radici semplici, per forza la matrice sarà diagonalizzabile con 1 e -1 come autovalori.

Sono rimasti, a livello di forma canonica, due casi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Se fosse risp. alla} \\ \text{base canonica} \\ \text{sarebbe la simmetria} \\ \text{rispetto al piano } xy \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{lascio fissa la} \\ x \text{ e faccio la} \\ \text{simul. risp. all'origi-} \\ \text{ne nel piano } yz. \end{array}$$

In generale avremo la stessa cosa rispetto ad una base v_1, v_2, v_3 che sta nelle colonne della M che diagonalizza.

ALGEBRA LINEARE -

LEZIONE 047

Titolo nota

28/11/2014

JORDAN REALE VS JORDAN COMPLESSA (come dedurre l'una dall'altra)

Esempio 1 Sia A matrice 2×2 con autovalori $3 \pm 4i$.

Qual è la forma canonica?

$$\begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{C} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{R}$$

La reale si deduce dalla complessa.

Esempio 2 A matrice reale 4×4 con autovalori $3 \pm 4i$, entrambi con $m_g = 1$.

Gli autovalori hanno $m_a = 2$ (entrambi) e $m_g = 1$, quindi A è diagonalizzabile, nemmeno in $\mathbb{C}$.

(Fatto generale: se A è una matrice reale che ha $a+ib$ come autovalore, allora ha anche $a-ib$ ed i due hanno le stesse m_a e m_g)

Su $\mathbb{C}$ avremo dei blocchi da 2:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3+4i & 1 \\ 0 & 3+4i \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3-4i & 1 \\ 0 & 3-4i \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Oss. Le matrici di partenza non possono essere simmetriche perché non hanno autovalori reali.

Esempio 3 Una matrice simm. e una non simm. possono essere simili?

Certo! Basta prendere, per esempio, una matrice non simmetrica che sia diagonalizzabile. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{diagonalizzabile}$$

Esempio 4 $A = \begin{pmatrix} 7 & a & 9 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Per quali valori di a è diagonalizzabile?

La cosa che decide la diagonalizzabilità è $\text{mg}(7)$.

$$\text{mg}(7) = \dim(\ker(A - 7I))$$

$$A - 7I = \begin{pmatrix} 0 & a & 9 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $a = 0$, allora $\text{rank} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 2 \Rightarrow \text{diag.}$

Se $a \neq 0$, allora $\text{rank} = 2$ $\Rightarrow$ addio diag.

D-rank = 2

— 0 — 0 —

Facile: passa da jordan su $\mathbb{C}$ a jordan su $\mathbb{R}$

Domanda successiva: come ottenere la M che jordanizza su $\mathbb{R}$ dalla M che jordanizza su $\mathbb{C}$

— 0 — 0 —

Esempio 5

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

autovalori = $2 \pm i$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(5-\lambda)(-1-\lambda) + 10 = -5 - 5\lambda + \lambda + \lambda^2 + 10 \\ = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

La forma canonica di A è

$$\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{C} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{R}$$

Come ottengo la M di passaggio. Su $\mathbb{C}$ basta calcolare gli autovettori

$$A - (2+i)Id = \begin{pmatrix} 3-i & -2 \\ 5 & -3-i \end{pmatrix}$$

Devo fare il ker che è $\text{Span}(2, 3-i)$

$$\text{Dovrei fare } \begin{pmatrix} 3-i & -2 \\ 5 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (3-i)x - 2y = 0 \\ 5x - (3+i)y = 0 \end{cases} \quad \leadsto \text{vedo che una sol. è } x=2, y=3-i$$

Per tranquillità sostituisco nella 2a:

$$10 - (3+i)(3-i) = 0$$

Fatto generale! se $(2, 3-i)$ è autovettore relativo a $\lambda = 2+i$,
allora $(2, 3+i)$ è autovettore " " $\lambda = 2-i$

Quindi sui complessi la M di passaggio è $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix}$

la verifica da fare sarebbe che

$$D = M^{-1} A M$$

Voglio ora trovare la N tale che $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = N^{-1} A N$

1° modo le colonne di N sono la base v_1, v_2 in cui l'applicazione ha la matrice di Jordan, cioè deve succedere che

$$\begin{cases} A v_1 = 2 v_1 - v_2 \\ A v_2 = v_1 + 2 v_2 \end{cases}$$

Posto $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ otteniamo un sistema di 4 equ. in 4 incognite

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2x - z \\ 5x - y = 2y - w \\ 5z - 2w = x + 2z \\ 5z - w = y + 2w \end{cases} \quad \begin{matrix} Av_1 = 2v_1 - v_2 \\ Av_2 = v_1 + 2v_2 \end{matrix} \quad \leadsto \text{risolvo e trovo } v_1 \text{ e } v_2$$

2° modo Ancora boninus $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} N$

cioè $N \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} N$ ora pongo $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

e impongo le 4 equazioni. Ottergo un sistema molto simile a quello di sopra.

3° modo Gli autovalori erano $2+i$ e $2-i$
Poss. autovettori erano $(2, 3-i)$ e $(2, 3+i)$.

Vuol dire che

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix} = (2+i) \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

$$A \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'altra parte $(2+i) \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix} = (2+i) \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

$$= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Se uguaglio parte reale e parte immaginaria ottergo

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A v_1 = 2 v_1 - v_2$$

$$A v_2 = v_1 + 2 v_2$$

Morale: i vettori v_1 e v_2 sono parte reale e parte immaginaria degli autovettori complessi (uno qualunque dei 2)

$$\text{Autovettori complessi} \rightsquigarrow (2, 3 \pm i) = \underbrace{(2, 3)}_{v_1} \pm i \underbrace{(0, 1)}_{v_2}$$

La matrice N che Jordanizza sui reali è

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificare la relazione che deve succedere !!

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 48

Titolo nota

03/12/2014

PRODOTTI SCALARI IN GENERALE

Def. Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è un'applicazione bilineare simmetrica, cioè una funzione $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

(prende in input 2 vettori di V e restituisce un numero) che ha le seguenti proprietà (notazioni standard $b(u, v) = \langle u, v \rangle$)

$$(i) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{per ogni } u \in V \text{ e ogni } v \in V$$

$$(ii) \quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R} \dots$$

$$(iii) \quad \langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$$

$$(ii-bis) \quad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(iii-bis) \quad \langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$$

} lineare nella prima variabile

} lineare nella seconda variabile

Oss. La (ii-bis) segue da (i) + (ii)

$$\langle u, \lambda v \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$\uparrow$ (i) $\uparrow$ (ii) $\uparrow$ (i)

Analogamente, la (iii-bis) segue da (i) + (iii).

Esempio Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Dico che

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

è un prodotto scalare su V .

Devo fare le 3 verifiche semplici

$$(i) \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) \cdot p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle$$

$\uparrow$ propr. int.

$$(ii) \quad \langle \lambda p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 \lambda p(x) \cdot q(x) dx = \lambda \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx = \lambda \langle p(x), q(x) \rangle$$

$\uparrow$ propr. int.

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle &= \int_{-1}^1 [p_1(x) + p_2(x)] q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 p_1(x) q(x) dx + \int_{-1}^1 p_2(x) q(x) dx \\
 &= \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle.
 \end{aligned}$$

Supponiamo che $u_1, \dots, u_n$ sia una base di V . Se conosco il prodotto scalare fra elementi della base, cioè $\langle u_i, u_j \rangle$ al variare di i e j , allora lo conosco tra vettori in generale.

Esempio in cui $n=2$

$$\begin{aligned}
 u &= x_1 u_1 + x_2 u_2 \\
 v &= y_1 u_1 + y_2 u_2
 \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle &= \langle x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2 \rangle \quad (\text{uso lin. nella 1ª variabile}) \\
 &= x_1 \langle u_1, y_1 u_1 + y_2 u_2 \rangle + x_2 \langle u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2 \rangle \quad (\text{lin. nella 2ª}) \\
 &= x_1 y_1 \langle u_1, u_1 \rangle + x_1 y_2 \langle u_1, u_2 \rangle + x_2 y_1 \langle u_2, u_1 \rangle + x_2 y_2 \langle u_2, u_2 \rangle
 \end{aligned}$$

Se conosco i prodotti $\langle u_i, u_j \rangle$ posso calcolare $\langle u, v \rangle$

Inoltre si ha che

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Prodotti scalari e matrici Dato un prodotto scalare, e data una base dello spazio V in cui è definito, posso costruire una matrice $B \in M_{n \times n}$ ponendo

$$b_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle \quad (\text{base è } u_1, \dots, u_n)$$

Questa matrice ha 2 proprietà fondamentali:

- ① è simmetrica ($b_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle = \langle u_j, u_i \rangle = b_{ji}$)
- ② se il vettore x sono le comp. di u rispetto alla base e il vettore y sono le comp. di v rispetto alla base, allora

$$\langle u, v \rangle = x^t B y$$

Esempio Stesso esempio di prima. Scriviamo la matrice associata al prodotto scalare nella base

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

$$v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4$$

Devo calcolare 16 prodotti scalari (un po' meno se uso le simmetrie)

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \cdot dx = 2$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x \cdot dx = 0$$

↑
x è dispari

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle v_1, v_4 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^3 \cdot dx = 0$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \cdot dx = \frac{2}{3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\langle v_2, v_4 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x^3 \cdot dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle v_4, v_4 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot x^3 \cdot dx = \frac{2}{7}$$

Usando la matrice B, calcolare il prodotto scalare tra $x^3 - x$ e $x^2 + 3x$.

Le componenti del 1° sono $(0, -1, 0, 1)$

Le componenti del 2° sono $(0, 3, 1, 0)$

Devo calcolare

$$(0 \ 3 \ 1 \ 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 3 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(0 \ 3 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$= 3 \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) = -2 + \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}$$

(controllare che venga lo stesso con l'integrale)

Osservazione Il prodotto scalare tra un vettore e se stesso è una forma quadratica.

Parallelismo con il passato

prod. scalare classico

$$x^t y$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

norma² = prodotto scalare di un vettore per se stesso

$\rightsquigarrow$ prodotto scalare generale

$$\rightsquigarrow x^t B y$$

$$\rightsquigarrow x^t B x = \text{forma quadratica}$$

Def. Si dice segatura di un prodotto scalare la segatura della forma quadratica ad esso associata.

Domanda: se io cambio base, come cambia la matrice associata ad un prodotto scalare?

Risposta: sia M la matrice di cambio di base, diciamo dalla nuova alla vecchia. Sia B la matrice del prodotto scalare nella base vecchia, e sia $\hat{B}$ la matrice del prodotto scalare nella base nuova.

Siano x e y le componenti di due vettori u e v nella base nuova.

Calcolo $\langle u, v \rangle$ nella nuova!

$$x^t \hat{B} y$$

Calcolo $\langle u, v \rangle$ nella vecchia: le componenti di u e v nella vecchia sono Mx e My , quindi

$$\langle u, v \rangle = (Mx)^t B (My) = x^t M^t B M y$$

Confrontando le 2 espressioni otteniamo

$$\hat{B} = M^t B M$$

relazione tra 2 matrici che rappresentano lo stesso prodotto scalare in 2 basi diverse

Achtung! Abbiamo usato matrici per 2 motivi totalmente diversi

① per rappresentare applicazioni lineari

② per rappresentare forme quadratiche e prodotti scalari

Sono 2 cose completamente diverse.

Ad esempio, cambiando base subiscano una sorte diversa.

Nel caso ① una matrice A diventa

$$\hat{A} = M^{-1} A M \quad \leadsto \text{matrici simili}$$

Nel caso ② una matrice B diventa

$$\hat{B} = M^t B M \quad \leadsto \text{matrici CONGRUENTI}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE —

LEZIONE 49

Titolo nota

03/12/2014

Forme canoniche di applicazioni lineari

Dato una matrice A , trovare $\hat{A}$ simile ad A il più semplice possibile, cioè trovare M invertibile t.c. $M^{-1} A M$ sia più semplice possibile

Risposta: jordan reale o complessa (o ancora meglio diagonalizzazione)

Forme canoniche di prod. scalari

Dato un prod. scalare in V , trovare una base in cui la matrice sia particolarmente semplice.

In termini di matrici: data una B simmetrica, trovare una M invertibile tale che $M^t B M$ sia più semplice possibile

Prima risposta: poiché B è simmetrica, per il teo. spettrale sappiamo che esiste M ortogonale tale che

$$\begin{array}{l} M^{-1} B M = \text{Diagonale} \\ \uparrow \leftarrow M \text{ è ortogonale} \quad \uparrow \text{ stessa} \\ M^t B M = \text{Diagonale} \end{array}$$

Quindi ogni matrice simmetrica è simile, ma anche congruente, ad una matrice diagonale. Posso scegliere M usando come colonne gli autovettori di B .

Seconda risposta (Sylvestrizzazione) Ogni matrice simmetrica B è congruente (non necessariamente simile) ad una matrice diagonale che ha sulla diagonale solo $+1, -1, 0$. Inoltre il numero di $1, -1, 0$ è la segnatura della forma associata.

Oss. Se B è definita positiva, allora è simile alla matrice identica.

In questo vuol dire che la base nuova è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare definito da B .

Per trovare una base ortonormale, basta usare GS rispetto al nuovo prodotto.

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Verifico che è definita positiva con Sylvester 3-2-1

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 3$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = 6$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$\begin{matrix} + & + & + \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\ p & p & p \end{matrix} \Rightarrow \text{segnetura } (3, 0, 0)$$

Per trovare una base ortonormale, parto dalla canonica e uso GS

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

$$v_1 = e_1 = (1, 0, 0)$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{1} (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle_B}{\langle v_2, v_2 \rangle_B} v_2$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{1} (1, 0, 0) - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle_B}{\langle v_2, v_2 \rangle_B} (-1, 1, 0) =$$

$$= (0, 0, 1) - (1, 0, 0) + (-1, 1, 0)$$

$$\langle e_3, v_2 \rangle_B = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$(1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2, 1, 1)$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Conclusione: una base ortogonale è $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-2, 1, 1)$.
(Sarebbe utile fare la verifica).

Per esercizio verifichiamo che v_2 e v_3 sono ortogonali

$$\langle v_2, v_3 \rangle_B = (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Volendo una base ortonormale dovrei dividere per le B -norme, cioè

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\langle v_1, v_1 \rangle_B^{1/2}} = v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\langle v_2, v_2 \rangle_B^{1/2}} = v_2 = (-1, 1, 0) \rightarrow \text{Bisogn. fare } (1 \ -1 \ 0)_B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\langle v_3, v_3 \rangle_B^{1/2}} = (-2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2 \ 1 \ 1)$$

$$(0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Riprova: usando $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ come colonne di M dovrei
"Sylvestrizzare"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^b \quad B \quad M$

Se B è definita positiva, posso Sylvesterizzare facendo

- ① base qualunque in partenza
- ② GS $\leadsto$ base ortogonale (basta per diagonalizzare)
- ③ Divido per le B-norme $\leadsto$ base ortonormale
- ④ Costruisco M usando come colonne la base ottenuta al pto 3

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Segnatura di B con Sylvester 1-2-3 :

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1 \quad \text{Det}_{2 \times 2} = 1 \quad \text{Det}_{3 \times 3} = \text{negativo} \quad + + + -$$

Segnatura $(2, 1, 0)$.

Per prima cosa trovo un s.sp. di dim. 2 su cui è definita positiva. lo posso fare completando i quadrati oppure vedendo ad occhio che $\text{Span}(\{e_1, e_2\})$ va bene.

$v_1 = e_1$ $v_2 = e_2$. Questi sono già B-ortonormali.

Per trovare v_3 io impongo di essere ortogonale a v_1 e v_2 , cioè cerco $v_3 = (x, y, z)$ imponendo i 2 prod. scalari nulli

$$\langle v_3, e_1 \rangle = 0 \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{x + 10z = 0}$$

$$\langle v_3, e_2 \rangle = 0 \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

Una possibilità è $(10, 0, -1) = v_3$

Una base ortogonale è $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (10, 0, -1)$

Per ortonormalizzarla basta dividere v_3 per $(-\langle v_3, v_3 \rangle)^{1/2}$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = (10 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (10 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 99 \end{pmatrix} = -99$$

Quindi una base "ortonormale" è $(1, 0, 0), (0, 1, 0), \left(\frac{10}{\sqrt{99}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{99}}\right)$

Verifica finale con $M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| v_3 \right)$ si deve avere

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 50

Titolo nota

03/12/2014

Componenti rispetto ad una base ortonormale

Sia V uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare definito positivo. Sia $v_1, \dots, v_m$ una base ortonormale. Sia $v \in V$ un vettore qualunque.

Allora la componente di v risp. a v_i è $\langle v, v_i \rangle$, cioè

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_m \rangle v_m$$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 coeff. della comb. lineare

Esempio Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni che sono comb. lineari di

$\{\sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x)\}$
 cioè di tutte le funzioni del tipo

$$f(x) = a \sin x + b \sin(2x) + c \sin(3x) + d \cos x + e \cos(2x) + f \cos(3x).$$

Si può dim. che V è uno spazio vettoriale di dim. 6.

Considero su V il prodotto scalare

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

Si verifica che è un prodotto scalare ed è definito positivo in quanto

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \geq 0 \quad \text{se } f \neq 0$$

$\uparrow$
 integrale di Lebesgue ≥ 0 e non sempre nulla

Non solo: quella scritta (cioè $\sin x, \dots, \cos(3x)$) è una base ortogonale

Infatti

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(rx) dx = 0 \quad \text{se } k \neq r \text{ interi}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(rx) dx = 0 \quad \text{sempre}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(rx) dx = 0 \quad \text{se } k \neq r \text{ interi}$$

Per dimostrarlo, basta usare le formule che trasformano prodotti in somme, e osservare che $\sin(mx)$ o $\cos(mx)$ hanno sempre integrale nullo fra 0 e 2π .

Applicazioni simmetriche

Def. Sia V uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare che indichiamo con $\langle u, v \rangle_B$.

Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ si dice simmetrica se

$$\langle f(u), v \rangle_B = \langle u, f(v) \rangle_B$$

Brutalmente: f inverte
nei B -prod. scalari

per ogni u e v in V .

Sia $u_1, \dots, u_n$ una base in V , sia B la matrice associata al prod. scalare, sia A la matrice associata ad f . Quali relazioni verificano A e B ?

Sia x il vettore delle componenti di u

Sia y il vettore delle componenti di v

Le componenti di $f(u)$ sono Ax , le componenti di $f(v)$ sono Ay

$$\begin{aligned} \langle f(u), v \rangle_B &= (Ax)^t B y \\ &= x^t A^t B y \end{aligned}$$

$$\langle u, f(v) \rangle_B = x^t B A y$$

Uguagliando si ottiene

$$A^t B = B A$$

Caso particolare: se il prodotto scalare è definito positivo e la base è ortonormale, allora $B = Id$ e quindi la relazione diventa $A^t = A$.

Quindi: un'applicazione lineare simmetrica rispetto ad un prodotto scalare def. pos. ha la matrice simmetrica se la base che uso è B-ortonormale.

Teorema B-spettrale Sia V uno spazio vettoriale
 Sia $\langle u, v \rangle_B$ un prod. scalare def. pos. su V
 Sia $f: V \rightarrow V$ lineare B-simmetrica
 Allora V ammette una base B-ortonormale costituita da autovettori di f .

Oss. La dimostrazione è del tutto analoga al caso del prodotto scalare classico.

Teorema B-spettrale (Versione matriciale).

Sia B una matrice simmetrica definita positiva.

Sia A una matrice tale che $A^t B = B A$.

⚠️ questa ti userò c'è (cometto dopo video)

Allora esiste una matrice M invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \text{Diagonale}$$

$$M^t B M = \text{Identità}$$

→ le colonne sono autovettori

→ le colonne sono una base B-ortonormale

Oss. La matrice M fa contemporaneamente 2 cose

- ① diagonalizza A nel senso della similitudine
- ② sylvesterizza B nel senso della congruenza.

Oss. Se $B = Id$, quello scritto è il vecchio teorema spettrale con ipotesi $A^t = A$ e tesi $M^{-1} A M = \text{Diagonale}$ e $M^t = M^{-1}$, cioè M ortogonale.

Esercizio Consideriamo $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ con il prodotto scalare

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

Sia $V = \text{Span} \{x^2 + 3x\}$.

Determinare una base ortogonale di $V^\perp$.

1° passo Trovo la matrice B risp. alla base $\{1, x, x^2\}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{conti come alla lezione 48.}$$

2° passo Trovo una base di $V^\perp$. Chiamato (a, b, c) il generico elemento di $V^\perp$, impongo le equazioni: (a, b, c) B -ortogonale a $(0, 3, 1)$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{2}{3}a + 2b + \frac{2}{5}c}$$

↑
Equazione
Cartesiana
di $V^\perp$

Per trovare una base basta trovare una base delle soluzioni, ad esempio $(3, -1, 0)$ e $(0, 1, -5)$
(se li volessi come polinomi sarebbero $3-x$ e $x-5x^2$)

3° passo Ortogonalizzo la base appena ottenuta con G.S

$$v_1 = (3, -1, 0)$$

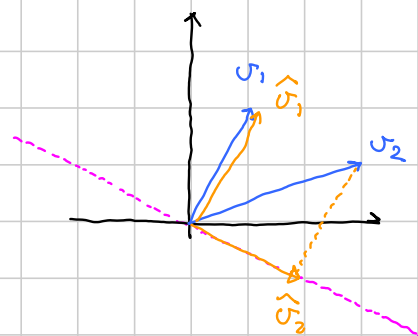
$$v_2 = (0, 1, -5) - \frac{\langle (0, 1, -5), (3, -1, 0) \rangle_B}{\langle (3, -1, 0), (3, -1, 0) \rangle_B} (3, -1, 0)$$

↑
Num. e denom. si calcolano
facilmente con la matrice.

Oss. Quando ho 2 vettori v_1 e v_2 , qual è l'effetto "geometrico" di GS?

v_1 resta inalterato

$\hat{v}_2$ diventa la proiezione di v_2 sullo spazio ortogonale a v_1 .



Se ho + vettori la cosa è analoga:

$\hat{v}_3$ sarebbe la proiezione di v_3 su $\text{Span}(v_1, v_2)^\perp$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 51

Titolo nota

05/12/2014

Geometria affine $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale

s.sp. vettoriale di dim. $k = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ con $v_1, \dots, v_k$ vettori
linearmente indipendenti

Esempi classici

- $n=2, k=1 \rightsquigarrow$ retta per l'origine nel piano
- $n=3, k=1 \rightsquigarrow$ " " " nello spazio
- $n=3, k=2 \rightsquigarrow$ piano per l'origine nello spazio

Descrizione parametrica $\rightsquigarrow$ come spanDescrizione cartesiana $\rightsquigarrow$ (sistema di) equazioni omogeneeUn sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ è del tipo

$$p_0 + \text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})$$

$$p_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

↑
parametri

Esempio Scrivere in parametrica e in cartesiana l'equazione del
piano in $\mathbb{R}^4$ (sottospazio affine di dim 2) che passa per

$$A = (1, 0, 1, 0)$$

$$B = (2, 1, 0, 3)$$

$$C = (1, 1, -1, 2)$$

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$

$$(1, 0, 1, 0) + t(1, 1, -1, 3) + s(0, 1, -2, 2) \quad (\text{parametrica})$$

Per la cartesiana un aspetto 2 equazioni del tipo

$$ax + by + cz + dw = e$$

1° modo: sostituisco i 3 p.ti nell'equazione e risolvo il sistema

$$\begin{cases} a + c - e = 0 \\ 2a + b + 3d - e = 0 \\ a + b - c + 2d - e = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e, c \text{ libere}$$

$$d = -e \quad b = 2c - 3d - e = 2c + 2e$$

$$a = -c + e$$

Per ottenere delle equazioni, diamo dei valori a c ed e

$$c = 1, e = 0 \quad \leadsto \quad a = -1, b = 2, c = 1, d = 0, e = 0$$

$$\leadsto \quad -x + 2y + z = 0$$

$$c = 0, e = 1 \quad \leadsto \quad a = 1, b = 2, c = 0, d = -1, e = 1$$

$$\leadsto \quad x + 2y - w = 1$$

La descrizione cartesiana è data dal sistema
$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - w = 1 \end{cases}$$

Volevo sì possono fare 2 verifiche

- ① che i 3 p.ti dati soddisfanno il sistema
- ② che risolvendo il sistema si ottenga lo stesso piano scritto sopra (o per lo meno una scrittura equivalente dello stesso)

Oss. La rappresentazione cartesiana è comoda per calcolare l'intersezione di 2 sottospazi.

Oss. Una singola equazione in $\mathbb{R}^4$ rappresenta un s.sp. affine di dim 3. Questo passa per l'origine se e solo se l'equazione è omogenea.

2° modo Cerco 2 vettori di $\mathbb{R}^4$ che siano ortogonali ai vettori che generano il piano, cioè $\underline{(1, 1, -1, 3)}$ e $\underline{(0, 1, -2, 2)}$.
Come posso fare questa ricerca? v_1 v_2

→ Ovviamente, imponendo prodotto scalare nullo e risolvendo il sistema

→ Completo v_1 e v_2 ad una base, che poi ortogonalizzo con GS $\leadsto \hat{v}_3$ e $\hat{v}_4$ sono ortogonali a v_1 e v_2 .

Questi due vettori sono i coeff. della parte omogenea del sistema. Per trovare la parte non omogenea sostituisco un p.to.

— o — o — o —

TRASFORMAZIONI AFFINI Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice applicazione affine (o affinità) se è del tipo

$$f(x) = Ax + v$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 matrice $n \times n$ vettore n -dimensionale

Esempio **$n=2$**

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 5x - y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A $\vec{x}$ $=$ $\vec{v}$

Proprietà 1 La composizione di 2 trasformazioni affini è una trasformazione affine,

Dim. $f(x) = Ax + v$ $g(x) = Bx + w$, Allora.

$$g(f(x)) = Bf(x) + w = B(Ax + v) + w = \underbrace{(BA)}_{\substack{\uparrow \text{ nuova} \\ \text{matrice}}} x + \underbrace{Bv + w}_{\substack{\uparrow \text{ nuovo} \\ \text{vettore}}}$$

Oss. La "parte matrice" di $g(f(x))$ è uguale alla composizione delle matrici di $f(x)$ e $g(x)$.

Esempio 1 **TRASLAZIONI** $A = Id$ $f(x) = x + v$

Esempio 2 **OMOTETIE CON CENTRO IN O** $A = \lambda Id$ $v = 0$

$$f(x) = \lambda x$$

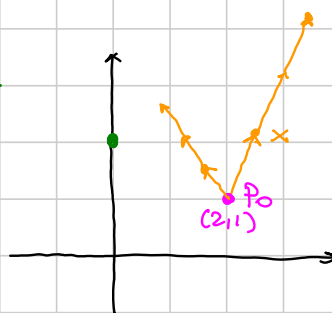
- se $\lambda > 1$ sta dilatando tutto di un fattore λ
- se $\lambda \in (0, 1)$ sta contraendo
- se $\lambda < 0$ c'è anche un ribaltamento

Esempio 3 **OMOTETIE CON CENTRO $\neq O$**

Strategia

$$x \rightsquigarrow x - P_0 \rightsquigarrow 3(x - P_0) \rightsquigarrow 3(x - P_0) + P_0$$

$\uparrow$ spostato l'origine in P_0 $\uparrow$ moltiplico per 3 $\uparrow$ riporto l'origine al suo posto



$$x \rightsquigarrow 3x - 2P_0 = f(x) \quad (\text{piccola verifica: } f(P_0) = P_0 \text{ come previsto})$$

Nell'esempio specifico: $P_0 = (2, 1)$ $f(x, y) = (3x - 4, 3y - 2)$

Se sostituisco $(x, y) = (0, 2)$ ottengo $(-4, 4)$

Esempio 4 Cosa ottengo se faccio

- prima l'omotetia con centro P_0 e fattore 3 $f(x)$
- poi l'omotetia con centro P_1 e fattore 2? $g(x)$

$$f(x) \quad x \rightsquigarrow x - P_0 \rightsquigarrow 3(x - P_0) \rightsquigarrow 3(x - P_0) + P_0 = 3x - 2P_0 = f(x)$$

$$g(x) \quad x \rightsquigarrow x - P_1 \rightsquigarrow 2(x - P_1) \rightsquigarrow 2(x - P_1) + P_1 = 2x - P_1 = g(x)$$

$$g(f(x)) = 2f(x) - P_1 = 2(3x - 2P_0) - P_1 = 6x - 4P_0 - P_1$$

Questa è una omotetia di fattore 6 rispetto ad un pto P_2 che resta fisso, cioè $6P_2 - 4P_0 - P_1 = P_2 \rightsquigarrow P_2 = \frac{4}{5}P_0 + \frac{1}{5}P_1$, che volendo posso ricavare conoscendo P_0 e P_1 .

Esempio 5 Cosa succede se faccio

- prima l'omotetia di fattore 2 rispetto a $(2,1)$ P_0
- poi l'omotetia di fattore $\frac{1}{2}$ rispetto a $(3,4)$ P_1

Otengo una traslazione.

$$f(x) = 2(x - P_0) + P_0 = 2x - P_0$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - P_1) + P_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}P_1$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2}(2x - P_0) + \frac{1}{2}P_1 = x + \frac{1}{2}(P_1 - P_0)$$

↑
vettore di
traslazione.

— ○ — ○ —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 52

Titolo nota

05/12/2014

ISOMETRIE Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice isometria se

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Detto altrimenti: le isometrie sono le applicazioni che conservano le distanze.

Teorema (struttura delle isometrie)

Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria se e solo se è del tipo

$$f(x) = Ax + b \quad (\text{cioè è un'affinità})$$

con la matrice A ortogonale.

Dim

1° fatto Tutte le affinità con A ortogonale conservano la distanza.

Presi $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\|^2 \\ &= \|Ax + b - Ay - b\|^2 \\ &= \|A(x - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 \\ &= \text{dist}^2(x, y) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{le matrici ortogonali conservano} \\ \text{le norme} \end{array} \right\}$$

Oss. Più in generale, se A è ortogonale, allora

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^t Aw = v^t \underbrace{A^t A}_{I_n} w = v^t w = \langle v, w \rangle$$

Se $v = w$ ottengo $\|Av\|^2 = \|v\|^2$

2° fatto Sia f un'isometria con $f(0) = 0$. Allora f conserva le norme, cioè

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

In fatti

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \text{dist}(f(x), 0) \\ &= \text{dist}(f(x), f(0)) \\ &= \text{dist}(x, 0) \\ &= \|x\| \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{uso } f(0)=0 \\ f \text{ è isometria} \end{array}$$

3° fatto Sia f un'isometria con $f(0) = 0$. Allora f conserva i prodotti scalari, cioè

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Per ipotesi

$$\text{dist}^2(f(x), f(y)) = \text{dist}^2(x, y)$$

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$$

$$\cancel{\|f(x)\|^2} + \cancel{\|f(y)\|^2} - 2\langle f(x), f(y) \rangle = \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} - 2\langle x, y \rangle$$

Semplificando (si può per il fatto precedente) segue la tesi.

4° fatto Sia f un'isometria con $f(0) = 0$. Allora $f(x) = Ax$ con A matrice ortogonale.

Preso $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Pongo $\bar{e}_k = f(e_k)$.

Allora $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Infatti

- per $i \neq j$ si ha

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \underset{\text{def.}}{=} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ conserva i prod. scalari}}}{=} \langle e_i, e_j \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base canonica}}}{=} 0$$

- per $i = j$ si ha

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = \|\bar{e}_i\|^2 = \|f(e_i)\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ conserva la norma}}}{=} \|e_i\|^2 = 1$$

Sia ora $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore qualunque.

Allora

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

$$f(v) = d_1 \bar{e}_1 + \dots + d_n \bar{e}_n$$

Vorrei tanto che $d_k = c_k$ perché così avrei che

$$f(v) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$$

che è la linearità.

Ma trattandosi di basi ortonormali

$$c_k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 coeff.} \\ \text{solo} \\ \text{prod. scal.}}}{\langle v, e_k \rangle} = \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ conserva i} \\ \text{prodotti scalari}}}{\langle f(v), f(e_k) \rangle} = \langle f(v), \bar{e}_k \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 coeff. solo} \\ \text{prod. scalari}}}{d_k}$$

Questo dimostra che f è lineare, cioè $f(x) = Ax$. Le colonne di A sono proprio $f(e_1) = \bar{e}_1, \dots, f(e_n) = \bar{e}_n$ ed essendo questi una base ortonormale la matrice sarà per forza ortogonale.

5° fatto Sia f un'isometria qualunque. Allora f è del tipo $Ax + b$, con A ortogonale.

Pongo $g(x) = f(x) - f(0)$. Allora è facile verificare che $g(x)$ è un'isometria e $g(0) = 0$. Ma allora $g(x) = Ax$ e quindi

$$f(x) = Ax + \underbrace{f(0)}_b.$$

ISOMETRIE DI $\mathbb{R}^2$ $f(x) = Ax + b$
con A matrice 2×2 ortogonale.

Esercizio già fatto Come sono fatte le matrici 2×2 ortogonali?

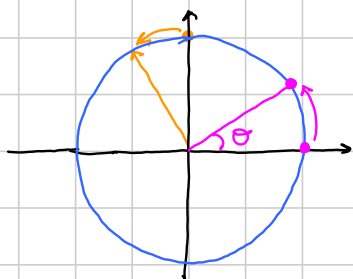
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det } 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det } -1$$

Vediamo la prima matrice cosa rappresenta.

$$(1, 0) \rightsquigarrow (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$(0, 1) \rightsquigarrow (-\sin \theta, \cos \theta) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right)$$



$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ rotazione di θ
 in senso antiorario
 rispetto all'origine

Chi sono gli autovalori della matrice?

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \quad \text{Det} = \lambda^2 - \underbrace{2\cos\theta}_{\text{Traccia}}\lambda + \underbrace{1}_{\text{Det}}$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Ho quindi due radici complesse coniugate.

Una matrice di rotazione in $\mathbb{R}^2$ e la forma di Jordan reale di se stessa,

Parenthesi in generale 2 numeri complessi coniugati si scrivono nella forma

$$\rho \cos\theta \pm i\rho \sin\theta$$

quindi il blocco di Jordan corrispondente diventa

$$\rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ similitudine $\uparrow$ rotazione

Casi particolari di rotazione

$$\theta = 90^\circ \text{ antioraria} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = 90^\circ \text{ oraria} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = 180^\circ \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

equivalente a fare

- l'omotetia di fattore -1
- simmetria rispetto all'origine

Esercizio Scrivere la rotazione di 90° in senso orario
rispetto al pto $P_0 = (2,1)$

$$x \rightsquigarrow (x - P_0) \rightsquigarrow \text{Rot}(x - P_0) \rightsquigarrow R_0(x - P_0) + P_0$$

In componenti

$$(x, y) \xrightarrow[\text{tolgo } P_0]{\downarrow} (x-2, y-1) \xrightarrow[\text{ruoto}]{\downarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ -x+2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (y+1, -x+3)$$

$\uparrow$
aggiungo P_0

$$f(x, y) = (y+1, -x+3) \quad \text{In particolare } f(2,1) = (2,1)$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 53

Titolo nota

10/12/2014

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE IN $\mathbb{R}^2$

Def. Una $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dice isometria se

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

Teorema f è isometria $\Leftrightarrow f(x) = Ax + b$

$\uparrow$
matrice ortogonale

Fatto Le matrici 2×2 ortogonali sono quelle del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 1 \quad \text{autov: } \cos \theta \pm i \sin \theta$$

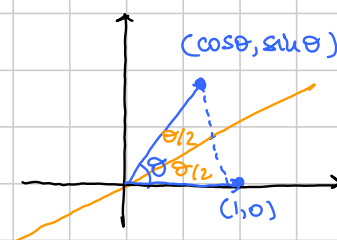
ROTAZIONE con centro nell'origine
di angolo θ in senso antiorario

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \quad \text{autov: } \pm 1$$

SIMMETRIA rispetto ad
una retta che passa per 0

Nel caso della simmetria, la retta rispetto alla quale si fa si può vedere in due modi

- 1° modo : è l'autospazio di 1
- 2° modo : vedo dove va $(1, 0)$, cioè $(\cos \theta, \sin \theta)$ e la retta sarà l'asse del segmento che li congiunge, cioè la retta che passa per l'origine e forma con il semiasse positivo delle x un angolo $\theta/2$



Achtung! La caratterizzazione della retta risp. a cui si fa la simmetria vale solo nel caso in cui $f(x) = Ax$, cioè $b = 0$.

CLASSIFICAZIONE Come sono fatte tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$?

Tutto si basa sull'insieme dei p.ti fissi, cioè gli $x \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x)=x$.

Algebricamente, per trovare i p.ti fissi risolvo

$$Ax + b = x, \quad \text{cioè} \quad \underline{(A - Id)x = -b}$$

sistema lineare 2×2 non omogeneo

Ci sono 4 casi

- nessuna soluzione
- soluzione unica (un pto)
- infinite sol. dipendenti da un parametro (una retta)
- infinite sol. dipendenti da due parametri (tutto il piano fisso, cioè $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$)

Allora

- se l'insieme dei p.ti fissi è una retta, la trasformazione è la simmetria risp. alla retta
- se c'è un unico pto fisso, la trasformazione è una rotazione con centro in quel pto di angolo $\theta \neq 0$
- se non ci sono p.ti fissi, allora ci sono 2 possibilità
 - $f(x)$ è una traslazione
 - $f(x)$ è una simmetria risp. ad una retta, seguita da una traslazione rispetto ad un vettore parallelo al vettore velocità della retta.

Dettagli sul caso senza p.ti fissi Se non ci sono p.ti fissi, vuol dire che il sistema

$$(A - Id)x = -b$$

non ha soluzioni. Per Rouché - Capelli vuol dire che i 2 ranghi (quali?) sono diversi. Quindi per forza $\text{rang}(A - Id) = 0, 1$

- Se $\text{rang}(A - Id) = 0$, allora $A - Id = 0$, cioè $A = Id$, cioè $f(x) = x + b$ e questa è la traslazione

- Se $\text{rang}(A - Id) = 1$, allora $\lambda = 1$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $= 1$, quindi per forza l'altro autovalore è -1 , quindi A è una matrice di simmetria rispetto ad una retta.

A questo imponendo che $-b \notin \text{Im}(A - Id)$ si ottiene che b deve essere parallelo alla direzione della retta.

— o — o —

Ricapitolando: di fronte ad una $f(x)$

- come capisco che si tratta di una isometria?

Risposta: guardo se la matrice è ortogonale

- come capisco di cosa si tratta?

Risposta: guardo i p.ti fissi

— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = (-y + 7, x - 4)$

La scrivo come $f(x) = Ax + b$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

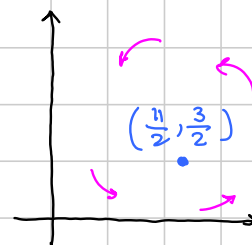
ROTAZIONE

DI 90° IN SENSO
ANTIORARIO

Per sapere rispetto a cosa sto ruotando, calcolo il p.to fisso

$$f(x, y) = (x, y); \quad (-y + 7, x - 4) = (x, y)$$

$$\begin{cases} -y + 7 = x \\ x - 4 = y \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x = 11 \\ 2y = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = \frac{11}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{matrix}$$



Dato una applicazione, come determino

① L'immagine di un p.to, ad esempio l'immagine di $(2,1)$?

Sostituisco nell'espressione! $f(2,1) = (-1+7, 2-4) = (6, -2)$

② La controimmagine di un p.to, ad esempio chi va finire in $(2,1)$?

Risolve il sistema inverso $(-y+7, x-4) = (2,1)$

③ L'immagine di una retta, ad esempio la retta $x+2y=3$?

1° modo: prendo 2 p.ti della retta, vedo dove vanno a finire, e determino la retta immagine.

2° modo: scrivo la retta in parametrica, nell'esempio

$$(1,1) + t(2,-1) = (1+2t, 1-t)$$

e sostituisco nell'espressione di $f(x,y)$

$$\left(\underbrace{-1+t+7}_{-y+7}, \underbrace{1+2t-4}_{x-4} \right) = \underbrace{(6, -3) + t(1, 2)}_{\text{retta immagine in forma parametrica}}$$

questa direzione è il rotato della direzione precedente

④ La controimmagine di una retta, cioè ad esempio quale retta va a finire nella retta $x+2y=3$?

1° modo: faccio la controimmagine di due p.ti.

2° modo: cerco la parametrica a coeff. incogniti

$$(a,b) + t(c,d) = (a+tc, b+td)$$

poi sostituisco ed impongo che venga la retta data

$$\left(\underbrace{-b-td+7}_{-y+7}, \underbrace{a+tc-4}_{x-4} \right) = (1+2t, 1-t)$$

Uguagliando i coeff. trovo a, b, c, d
 $c = -1, d = -2, a = 5, b = 6$

3° modo : sostituisco l'espressione di $f(x, y)$ nell'eq. cartesiana della retta

$$\begin{array}{c} x + 2y = 3 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ -y+7 \quad x-4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -y+7+2(x-4) &= 3 \\ -y+2x+7-8 &= 3 \\ -y+2x &= 4 \end{aligned}$$

Oss. Detto brutalmente

- Le rappresentazioni parametriche vanno bene "in avanti"
- Le " " "cartesiane" " " "indietro"

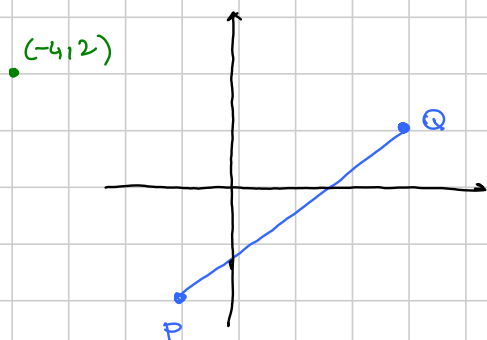
— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 54

Titolo nota

10/12/2014

Esempio 1 Nel piano, un quadrato ha un vertice in $(-1, -2)$ e un vertice in $(3, 1)$, e un terzo vertice nel semipiano $y \geq 0$. Chi sono gli altri 2 vertici?



Si può fare contando i quadretti...

Metodo più sistematico:

- scrivo la rotazione di 90° antioraria con centro in P, la applico a Q e trovo un terzo vertice
- analogamente, scrivo la rot. 90° oraria rispetto a Q e la applico a P.

Rotazione 90° antioraria con centro in P

$$x \rightsquigarrow x - p \rightsquigarrow \text{Rot}(x - p) \rightsquigarrow \text{Rot}(x - p) + p$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -y-2 \\ x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-3 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f(x, y) = (-y-3, x-1)$$

e in particolare

$$f(Q) = f(3, 1) = (-4, 2)$$

— o — o —

Esempio 2 Consideriamo la retta $x+2y=3$.

Scrivere le rette passanti per $(4, -1)$ e che formano con la retta data un angolo di 60°

Chi sono i vettori direzione delle 2 rette che cerco?

Sono i ruotati di 60° orario e antiorario della retta data (o meglio del suo vettore direzione $(-2, 1)$)



$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La prima retta è $(4, -1) + t(2 - \sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 1)$

Per la seconda, uso la matrice con -60° e ottengo

$$(4, -1) + t(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1)$$

Esempio 3 Scrivere l'espressione della simmetria rispetto alla retta $x+2y=3$.

Passo indietro: come si risolverebbe il problema se la retta passasse per l'origine?

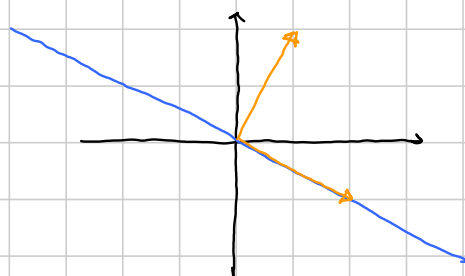


Esempio 3-E Scrivere la simmetria rispetto alla retta $x+2y=0$

Strategia: $v_1 = (2, -1)$ $v_2 = (1, 2)$
 dir. retta perp. retta

$$A v_1 = v_1$$

$$A v_2 = -v_2$$



Quindi la matrice A , nella base $\{v_1, v_2\}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ora vado nella base canonica con la matrice di cambio di base

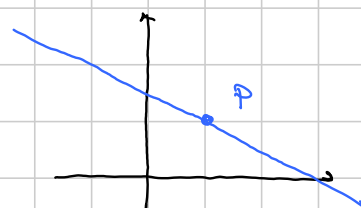
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

L'ultima scritta è la matrice che rappresenta la simmetria rispetto a $x+2y=0$.

Tornando all'esercizio 3:

ora facciamo



$$x \rightsquigarrow (x-P) \rightsquigarrow \text{Sim}(x-P) \rightsquigarrow \text{Sim}(x-P)+P$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il conto si ottiene l'espressione

$$\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} + 1 = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5}$$

$$-\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} + 1 = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5}$$

Reverse engineering

Calcoliamo i p.ti fissi, cioè risolviamo

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} = x \\ -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{12}{5} = y \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y = -\frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = -\frac{12}{5} \end{cases} \quad \begin{matrix} x+2y=3 \\ \text{uguale} \end{matrix}$$

e quindi i p.ti fissi sono esattamente la retta

Domanda: dove va a finire la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

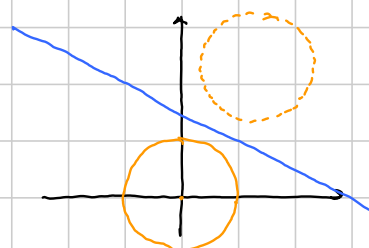
Il raggio resta lo stesso, il centro viene trasformato dalla simmetria

$$(0,0) \rightsquigarrow \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$\uparrow$ vecchio centro $\uparrow$ nuovo centro

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 1$$

equazione della nuova circonferenza



Esempio Cosa succede se faccio

→ prima la simmetria rispetto alla retta $x + y = 3$

→ poi una rotazione di 60° rispetto ad un p.to dato

Idea: le matrici si compongono, quindi guardando i determinanti la composizione avrà determinante -1 , quindi sarà una matrice di simmetria. Quindi la parte matriciale è di simmetria.

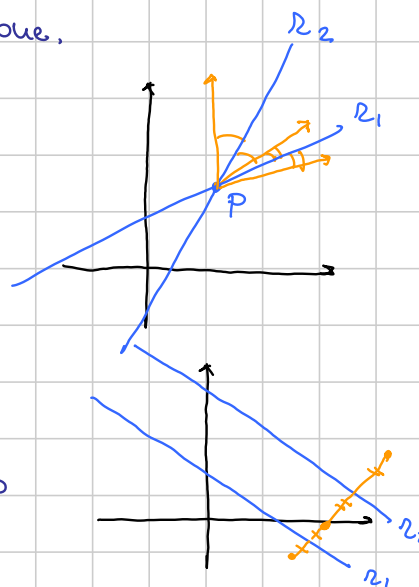
Esempio Cosa succede se compongo 2 simmetrie

La parte matriciale è il prodotto di 2 matrici di $\det = -1$, quindi ha $\det = 1$, quindi è una matrice di Rotazione.

Ora

→ se le 2 rette non sono parallele, allora avrò la rotazione rispetto al p.to di intersezione e l'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo compreso tra le due rette

→ se le 2 rette sono parallele ottengo una traslazione di un vettore che è il doppio della distanza fra le rette.



ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 55

Titolo nota

10/12/2014

Isometrie in $\mathbb{R}^3$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che conservano la distanza

Algebricamente: $f(x) = Ax + b$
 $\uparrow$
 matrice 3×3 ortogonale

Come sono fatte le matrici 3×3 ortogonali?

Domanda equivalente: come sono fatte tutte le isometrie che mandano l'origine in sé?

Sono sostanzialmente di 4 tipi

- identità
- simmetria rispetto ad un piano per l'origine
- rotazione rispetto ad una retta che passa per l'origine
- rotazione rispetto ad una retta + simmetria risp. al piano $\perp$ alla retta

Fatto 1 Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice ortogonale, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$

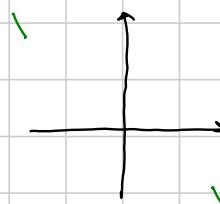
Dim. Sia v un corrispondente autovettore, cioè $Av = \lambda v$.
 Poiché A è ortogonale deve essere $|Av| = |v|$, ma allora
 $|Av| = |\lambda v| = |\lambda| \cdot |v| = |v| \Rightarrow |\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$

Fatto 2 Una matrice 3×3 ha per forza un autovalore reale

Dim. Il polinomio caratteristico è del tipo $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \dots$
 quindi

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_A(\lambda) = -\infty \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p_A(\lambda) = +\infty$$

quindi per esistenza degli zeri c'è una radice



Conseguenza: almeno un autovalore è ± 1 oppure -1 .

- Se c'è l'autovalore 1 con molteplicità 3 , allora $A = \text{identità}$
- Se c'è l'autovalore -1 " " " , allora $A = -Id$ e siamo nel quanto caso (rotazione risp. asse z di 180° seguita da simmetria risp. piano xy)
- Se c'è l'autovalore 1 con molteplicità 2 , allora l'altro autovalore è per forza -1 . Ma allora c'è un piano che resta fisso (l'autospazio di 1) e una direzione che viene ribaltata (l'autospazio di -1). Si può verificare che la direzione è ortogonale al piano, quindi si tratta della simmetria rispetto al piano
- Se c'è l'autovalore -1 con mult. 2 , allora il 3° è per forza 1 . Quindi si tratta della rotazione di 180° rispetto alla retta fissa (l'autospazio di 1)
- Se c'è l'autovalore 1 con molteplicità 1 , allora o siamo nel caso precedente o gli altri 2 sono complessi coniugati. Allora è una rotazione risp. alla direzione fissa.
- Se c'è l'autovalore -1 con molteplicità 1 , allora o siamo in un caso precedente, o gli altri 2 sono complessi coniugati. Quindi c'è una direzione che va in meno se stessa (l'autospazio di -1) e una rotazione rispetto alla direzione stessa.

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x - y + 2z = 0$

Esempio 0 Scrivere la simmetria rispetto al piano xy ($z = 0$)

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 0.1 Scrivere la simmetria rispetto al piano yz ($x=0$)

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Back to esempio 1 ① Scrivo una base ortonormale (o anche solo ortogonale) di $\mathbb{R}^3$ fatta da 3 vettori v_1, v_2, v_3 tali che $\text{span}(\{v_1, v_2\}) = \text{piano}$

② In questa nuova base la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

③ Riporto tutto in base canonica con un cambio di base.

Facciamo il conto per il piano $x - y + 2z = 0$

① $v_1 = (1, 1, 0)$ } base del piano

$v_2 = (2, 0, -1)$

$v_3 = (1, -1, 2)$ ← vettore ortogonale al piano

Già con questa base posso procedere perché la matrice è quella canonica C in questa base.

③ La matrice A rispetto alla base canonica sarebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Variente: se volessi v_1, v_2, v_3 base ortogonale, come potrei fare?

1° modo: uso GS sulla precedente

2° modo: Osservo che v_1 e v_3 sono già ortogonali tra di loro e produco v_2 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2, -2, -2) \rightsquigarrow (1, -1, -1)$$

Riassumendo, una base ortogonale è

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{base del piano}$$

$$v_2 = (1, -1, -1)$$

$$v_3 = (1, -1, 2) \quad \perp \text{ al piano}$$

Ora se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M,$$

allora l'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_M$

Quindi: divido la 1ª riga per 2, la 2ª per 3 e la 3ª per 6.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

In alternativa puoi:

→ dividere le colonne di M per le norme $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$

→ dividere le righe della trasposta per le stesse norme

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE -

LEZIONE 056

Titolo nota

17/12/2014

ISOMETRIE DELLO SPAZIO $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che conservano le distanze
 $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$

Caso più semplice

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = Ax$$

matrice 3×3 ortogonaleMatrici 3×3 ortogonali:

- Identità
- simmetria rispetto ad un piano
- rotazione di angolo θ risp. retta per 0
- rotazione come sopra + simmetria risp. piano $\perp$ alla retta

Domande: ① Data la descrizione geometrica, trovare la matrice che la rappresenta
 ② Data A matrice 3×3 ortogonale, capire cosa rappresenta geometricamente.

Problema ① nei quattro casi descritti sopra

L'identità è ovvia.

Simmetria rispetto ad un piano. Strategia!

→ Mi prendo una base del piano e un vettore ortogonale

$\underbrace{v_1, v_2}_{\text{base del piano}}, v_3$
 ↑
 vettore ortogonale

→ Nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ la simmetria è rappresentata dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice dalla base strana alla base strana

→ Cambio base per avere la matrice A dalla canonica alla canonica

$$A = M S M^{-1} \quad \text{dove} \quad M = (v_1 | v_2 | v_3)$$

Oss. ① Non serve che la base sia ortonormale/gonale. Serve solo che v_3 sia $\perp$ agli altri due.

② Se la base è ortogonale, è più facile fare M^{-1}

③ Se la base è ortonormale, allora è banale fare M^{-1} ($= M^t$),
ma si rischia di avere radici al denominatore

Esempio 1 Piano sia $2x + y - 3z = 0$

$$v_3 = (2, 1, -3) \quad \leftarrow \perp \text{ al piano}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = (1, -2, 0) \\ v_2 = (0, 3, 1) \end{array} \right\} \text{ base del piano e sono per forza } \perp \text{ a } v_3$$

La matrice della simmetria è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

Esempio 2 Consideriamo il piano che passa per l'origine e per i punti $\underline{(2, 1, 2)}_{v_1}$ e $\underline{(3, 1, 3)}_{v_2}$

Potei trovare l'eq. del piano e procedere come prima.

In realtà ho già v_1 e v_2 perché il piano è $\text{Span}(\{v_1, v_2\})$.

Devo solo procurarmi v_3 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = (1, 0, -1) \quad \text{verifica che è } \perp \text{ agli altri 2}$$

A questo p.to procedo come da strategia.

Rotazione di un angolo θ rispetto ad una retta

↑ passante per l'origine

Caso semplice: rotazione intorno all'asse z .

Bisogna specificare il verso di rotazione: rotazione di θ in senso antiorario per un osservatore che sta in piedi secondo il semiasse positivo delle z

In questo caso è equivalente a ruotare nel piano xy lasciando l'asse z inalterato. Quindi la matrice è

rotazione nel piano xy

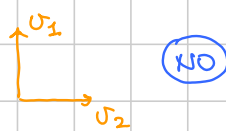
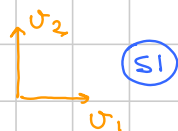
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Strategia per ruotare intorno ad una retta generica:

↑ per l'origine

→ Mi procuro una base v_1, v_2, v_3 in cui

- v_3 rappresenta la direzione della retta e "come sta in piedi l'osservatore"
- v_1, v_2 sono una base del piano $\perp$ alla retta, e sono una base ortonormale del piano (basta ortogonale con la stessa norma)



v_1 e v_2 devono essere tali che v_1 si sovrappone a v_2 con una rotazione di 90° in verso giudicato antiorario dall'osservatore.

Come capisco se v_1 e v_2 sono giusti / sbagliati? Quando la matrice di cambio di base: se ha $\det > 0$ è quella giusta, altrimenti è quella sbagliata (e basta scambiare v_1 e v_2)

→ In questa base la rotazione ha la forma "canonica" scritta sopra

→ Cambio base con la matrice M ,

Esempio Scrivere la matrice A che rappresenta la rotazione di 90° in verso orario rispetto alla retta $t(1,2,3)$
 per l'origine in piedi secondo $(1,2,3)$
 $\uparrow$
 $\uparrow$
 v_3

Mi servono v_1 e v_2 che sono una base ortonormale del piano $\perp$ alla retta, cioè il piano $x+2y+3z=0$

$$w_1 = (-2, 1, 0) \quad w_2 = (-3, 0, 1)$$

Per renderla ortogonale ho 2 alternative: $\rightarrow$ GS su w_1, w_2

$\rightarrow$ ottenere un nuovo w_2
 a partire da w_1 e v_3
 con la misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{w}_2 = (-3, -6, 5)$$

Vediamo se il verso è giusto

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 36 + 5 + 9 + 20 > 0$$

OK.

Ortonormalizzo i primi 2: $v_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$$v_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Matrice voluta

ALGEBRA LINEARE -

LEZIONE 57

Titolo nota

17/12/2014

Esempio Rotazione di 30° intorno all'asse y in un verso giudicato antiorario da un osservatore in piedi lungo il semiasse positivo delle y .

Cerco v_1, v_2, v_3 con $v_3 = (0, 1, 0)$ e $\{v_1, v_2\}$ base ortonormale del piano xz

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (0, 0, 1),$$

va bene o bisogna scambiarli? Devo controllare $\text{Det}(v_1|v_2|v_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 : \text{devo scambiare } v_1 \text{ e } v_2,$$

Vera base: $v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (0, 1, 0)$

La forma canonica della rotazione è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

La matrice A dalla base canonica alla base canonica è

$$(v_1|v_2|v_3) R (v_1|v_2|v_3)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↖ l'inversa è la trasposta

Rotazione risp. ad una retta seguita da simmetria rispetto al piano $\perp$

Tutto come nel caso della rotazione, solo che in fondo c'è -1

rotazione in un piano

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

simmetria rispetto al piano $\perp$ alla retta

— 0 — 0 —

Domanda 2 : data la matrice ortogonale A , come capisco di cosa si tratta geometricamente?

Quando autovalori ed autovettori

- se 1 è autovalore con mult. 3, allora $A = Id$
- se 1 è autovalore con mult. 2, allora A è simmetria rispetto all'autospazio di 1 (che è un piano)
- se 1 è autovalore con mult. 1, allora A è rotazione rispetto alla retta che è l'autospazio di 1 . Gli altri 2 autovalori saranno del tipo $\cos\theta \pm i\sin\theta$ e θ è l'angolo di cui sto ruotando (possono essere reali se $\theta = 180^\circ$)
- se 1 non è autovalore, allora -1 è autovalore, e siamo di fronte ad una rotazione seguita da simmetria. L'asse di rotazione è generato da un autovettore di -1 e l'angolo di rotazione è descritto dagli altri 2 autovalori che sono del tipo $\cos\theta \pm i\sin\theta$ (possono essere -1 se $\theta = 180^\circ$).

Occhio : $A = -Id$ rientra in questo ultimo caso.

— 0 — 0 —

Esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$ è una matrice ortogonale (le colonne sono ortogonali e di norma 1)

Rappresenta la trasformazione $(x, y, z) \rightarrow (y, -x, -z)$

Cerco gli autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{Det: } -\lambda^2(\lambda+1) - (\lambda+1) \\ = -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

Autovalori: $\lambda = -1$ $\lambda = \pm i$

A = rotazione di 90° rispetto ad una retta, seguita da simmetria rispetto al piano $\perp$.

Quale retta? Devo trovare un autovettore di -1 . Metto $\lambda = -1$ nella matrice $A - \lambda I$ e cerco una base del ker

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ha rango 2, e una base del ker è } (0, 0, 1)$$

Tornando alla matrice iniziale, la vediamo con occhi diversi

rotazione di 90° ORARIA per
un semiasse in piedi lungo il
semiasse positivo
della z

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ribaltamento rispetto
al piano xy

— 0 — 0 —

Caso generale in cui $f(0) \neq 0$ $f(x) = Ax + b$

Classificazione completa delle isometrie

Come nel caso del piano, dipende dall'insieme dei p.ti fissi, cioè dalle soluzioni di $f(x) = x$, cioè $Ax + b = x$, cioè $(A - Id)x = -b$ che è un sistema lineare non omogeneo.

1° caso Punti fissi = tutto $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$
($A = Id$, $b = 0$)

2° caso Unico p.to fisso $\rightsquigarrow$ rotazione rispetto ad una retta seguita da simmetria rispetto ad un piano $\perp$ alla retta. La retta ed il piano si incontrano nel p.to fisso.

3° caso Punti fissi = una retta $\rightsquigarrow$ rotazione di un certo angolo intorno alla retta. L'angolo di rotazione si vede dagli autovalori $\cos \theta \pm i \sin \theta$ della matrice.

4° caso Punti fissi = un piano $\rightsquigarrow$ simmetria rispetto al piano

5° caso Non ci sono p.ti fissi. Ci sono 3 sottocasi:

5.1 $\rightsquigarrow$ traslazione $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$.

5.2 $\rightsquigarrow$ simmetria rispetto ad un piano seguita da traslazione in una direzione parallela al piano.

5.3 $\rightsquigarrow$ rotazione intorno ad una retta seguita da traslazione nella direzione della retta

Come capisco, data l'espressione algebrica $Ax+b$, in quale caso mi trovo?

→ Determino i p.ti fissi risolvendo il sistema $Ax+b=x$

→ se sono in uno dei primi 4 casi, è fatta

→ se sono nel quinto caso guardo la matrice A , ed in particolare guardo la mg dell'autovalore 1

- $mg = 3 \rightsquigarrow 5.1$

- $mg = 2 \rightsquigarrow 5.2$

- $mg = 1 \rightsquigarrow 5.3$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE

LEZIONE 58

Titolo nota

17/12/2014

Esempio 1 Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano di equazione $z = 3$.

Strategia generale:

- considero un p.to P sul piano
- considero la simmetria S rispetto al piano // passante per l'origine ($z = 0$ in questo caso)
- faccio il solito spostamento

$$x \rightsquigarrow x - P \rightsquigarrow S(x - P) \rightsquigarrow S(x - P) + P$$

↑
sposto l'origine
in P
↑
faccio la
simmetria
↑
riporto l'origine
dove stava all'inizio

Ad esempio $P = (0, 0, 3)$ (ma potrei prendere $P = (-1, 7, 3)$)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 - z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6 - z \end{pmatrix}$$

x
 $x - P$
 $S(x - P)$
 $S(x - P) + P$

L'espressione è $(x, y, z) \rightarrow (x, y, 6 - z)$

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x = 8$

Con gli stessi conti otteniamo $(x, y, z) \rightarrow (16 - x, y, z)$

Esempio 3 Cosa succede facendo prima la simmetria risp. a $z=3$ e poi la simmetria rispetto a $x=8$.

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, 6-z) \rightarrow \underline{(16-x, y, 6-z)}$$

che cosa rappresenta?

Calcolo i p.ti fissi:

$$\begin{cases} 16-x = x \\ y = y \\ 6-z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = \text{libero} \\ z = 3 \end{cases}$$

Le soluzioni sono un sottospazio di dimensione 1: $(8, t, 3)$

oppure $\underline{(8, 0, 3) + t(0, 1, 0)}$

retta

La composizione è una rotazione intorno alla retta che rappresenta l'intersezione tra i 2 piani (è la retta che passa per $(8, 0, 3)$ ed è parallela all'asse y). L'angolo di rotazione lo vedo dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{-1} & 0 & \textcircled{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{0} & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rotazione di } 180^\circ \text{ nel piano } xz$$

(sarebbe $-Id$ in quel piano)
— 0 — 0 —

Oss. In generale componendo due simmetrie si ottiene una rotazione, componendo due rotazioni si ottiene ancora una rotazione

— 0 — 0 —

Come determino l'immagine di un piano o di una retta?

Esempio Prendo la trasf. di prima $(x, y, z) \rightarrow (16-x, y, 6-z)$ e mi chiedo dove finisce il piano $x + y - 3z = 5$?

Soluzione bovina: prendo 3 p.ti sul piano, li sostituisco e scrivo l'equazione del piano che passa per i trasformati

Soluzione alternativa : scrivo il piano in parametrica e poi sostituisco

$$x+y-3z=5 \rightsquigarrow (5, 0, 0) + t(1, -1, 0) + s(3, 0, 1) \\ = (5+t+3s, -t, s)$$

Sostituisco nella trasformazione e trovo

$$(11-t-3s, -t, 6-s) = (11, 0, 6) + t(-1, -1, 0) + s(-3, 0, -1)$$

Da qui volendo ottengo la cartesiana dell'immagine.

Come determino la controimmagine di un piano o di una retta?

1° modo (bovino) : controimmagine di 2 o 3 p.ti

2° modo : cerco la parametrica iniziale a coeff. incogniti, sostituisco e trovo i coefficienti

3° modo (per i piani) : "le cartesiane vanno bene indietro"

Se voglio la controimmagine del piano $x+y-3z=5$ rispetto alla trasformazione $(x, y, z) \rightarrow (16-x, y, 6-z)$ basta calcolare

$$\overset{x}{(16-x)} + \overset{y}{(y)} - 3\overset{z}{(6-z)} = 5 \\ 16-x+y-18+3z=5 \rightsquigarrow -x+y+3z=7$$

Verifica: controllare che l'immagine di $-x+y+3z=7$ sia proprio $x+y-3z=5$.

— o — o —

Esercizio Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ le rette

$$r_1: (1, 0, 2) + t(3, 1, 1)$$

$$r_2: (2, 1, 1) + t(1, 0, 3)$$

1ª domanda: posizione reciproca

Le rette non sono multiple, quindi sono incidenti o sghembe. Come decido? Vedo se si incontrano!

Metto a sistema usando due parametri diversi

$$(1, 0, 2) + t(3, 1, 1) = (2, 1, 1) + s(1, 0, 3)$$

$$t(3, 1, 1) - s(1, 0, 3) = (1, 1, -1)$$

Voglio sapere se l'ultimo è comb. lin. dei primi 2, quindi guardo

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 + 1 + 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow \text{sono sghembe}$$

2ª domanda: come trovo la distanza tra le 2 rette e i due punti $P \in r_1$ e $Q \in r_2$ che la realizzano?

1º modo Soivo la distanza² tra 2 pti generici delle rette

$$P = (1+3t, t, 2+t)$$

$$Q = (2+s, 1, 1+3s)$$

$$\text{dist}^2(P, Q) = (3t-s-1)^2 + (t-1)^2 + (1+t-3s)^2$$

Ora cerco t ed s in modo che tutto questo risulti minimo.

L'idea è di scrivere l'espressione come somma di quadrati in cui solo il primo contiene t e il secondo contiene s .

2° modo Cerco t e s in modo che $P-Q$ sia $\perp$ alle direzioni delle due rette.

$$P-Q = (3t-s-1, t-1, 1+t-3s) \leftarrow \text{congiungente } P \text{ e } Q$$

Impongo che sia $\perp$ alle due direzioni $(3,1,1)$ e $(1,0,3)$. Otengo

$$\begin{cases} 9t-3s-3+t-1+1+t-3s=0 \\ 3t-s-1+3+3t-3s=0 \end{cases} \leadsto \text{risolvo trovando } t \text{ e } s \text{ e} \\ \text{ho i p.ti che minimizzano la distanza.}$$

3° modo Scrivo il piano che contiene r_2 e non interseca r_1

$$\underbrace{(2,1,1) + t(1,0,3)}_{\text{contiene } r_2} + \underbrace{s(3,1,1)}_{\text{parallelo ad } r_1}$$

Calcolo ora la distanza di un qualunque p.to di r_1 , ad esempio il p.to base, da questo piano. Questo ultimo p.to. è facile,

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 59

Titolo nota

19/12/2014

Esercizio Che cosa rappresenta l'equazione

$$2x^2 + 5y^2 + 6xy = 10$$

come insieme nel piano cartesiano.

Senza il termine misto sarebbe un'ellisse. I termini a sx sono una forma quadratica nelle variabili (x,y) . Quando la segnatura

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} + & + & + \\ \uparrow & \text{d'ufficio} & \end{matrix} \quad \text{Segnatura} = (2, 0, 0) \quad ++$$

Cambiando opportunamente base, questa diventa la forma $x^2 + y^2$.

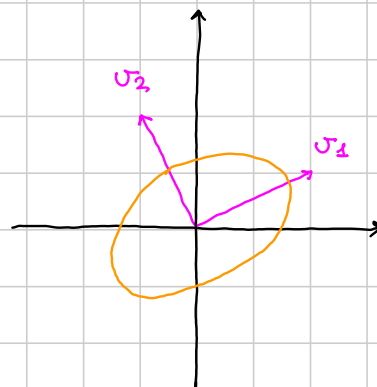
Grazie al teorema spettrale posso cambiare base in maniera
ortogonale e scrivere la forma quadratica come

$$\lambda x^2 + \mu y^2$$

↑ ↑
due autovalori
positivi

In questa nuova base l'equazione diventa

$$\lambda u^2 + \mu v^2 = 10$$



L'equazione originaria rappresenta un'ellisse che è in posizione standard rispetto ad una nuova base ortogonale v_1, v_2 . Per trovare v_1 e v_2 basta trovare gli autovettori della matrice.

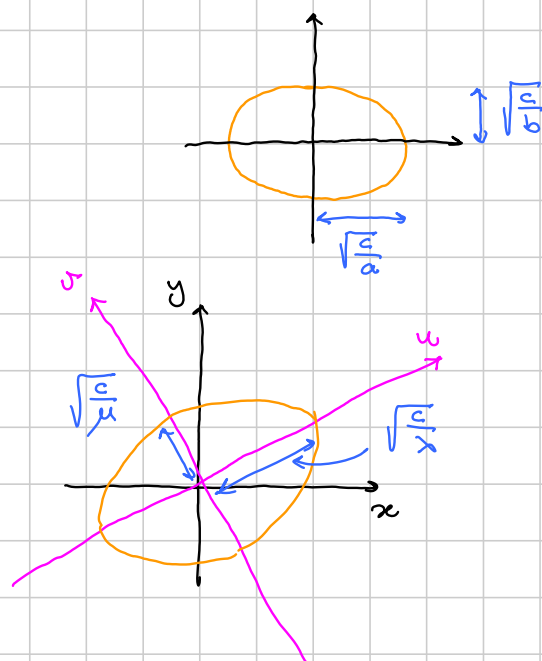
Conoscendo gli autovalori della matrice, posso determinare le lunghezze dei semiassi

In "posizione canonica" se ho

$$a x^2 + b y^2 = c$$

Quando è "storta", allora si fa lo stesso rispetto alla base "girata"

$$\lambda u^2 + \mu v^2 = c$$



Esempio 2

$$2x^2 + 4y^2 + 6xy = 10$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 8 - 9 < 0 \Rightarrow \text{autovalori } + -$$

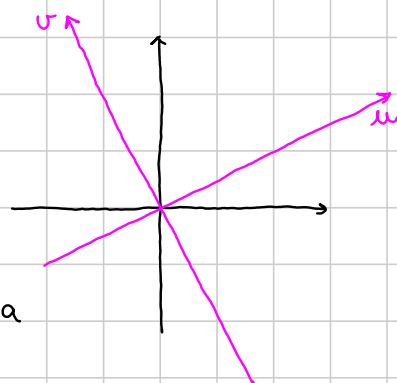
Rispetto alla base data dal teorema spettrale $\{v_1, v_2\}$

l'equazione diventa

$$\lambda u^2 - \mu v^2 = 10$$

λ, μ positivi

Gli asintoti dell'iperbole corrispondono alle rette su cui la forma quadratiche si annulla



$$2x^2 + 4y^2 + 6xy = 0 \rightsquigarrow x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}y + \frac{y}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}y - \frac{y}{2}\right) = 0 \quad (x-y)(x-2y) = 0$$

Gli asintoti sono le rette

$$x - y = 0$$

$$x - 2y = 0$$

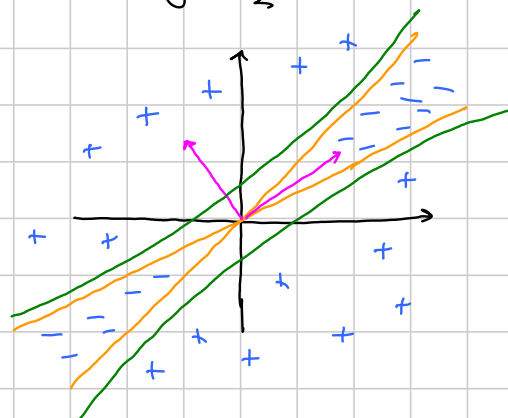
$$y = x$$

$$y = \frac{x}{2}$$

Se l'eq. è del tipo

$$\lambda u^2 - \mu v^2 = 10$$

l'iperbole vive
nella zona +



L'iperbole interseca l'asse $v=0$,
quindi l'asse generato
dall'autovettore corrispondente
all'autovalore positivo

Esempio 3

$$3x^2 + 5y^2 = 7$$

autovalori sono ++

Si può cambiando base farla diventare

$$u^2 + v^2 = 7$$

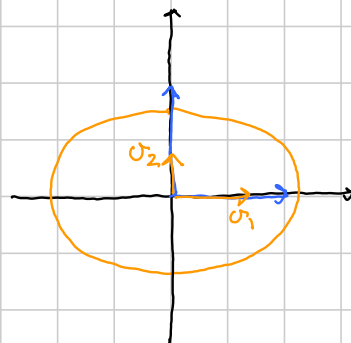
In questo caso basta porre

$$(\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{5}y)^2 = 7$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_u \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_v$

Geometricamente corrisponde a dilatare in
maniera i due assi.

Questa è l'azione tipica di una matrice
diagonale: cambiare scala in modo su vari
assi.



Esempio 4

$$x^2 + 3y^2 + 2xy + x + 7y = 25$$

Idea: fare una traslazione in modo da far sparire i termini di
primo grado.

Pongo

$$u = x + a$$

$$x = u - a$$

$$y = v + b$$

$$y = v - b$$

$$(u-a)^2 + 3(v-b)^2 + 2(u-a)(v-b) + u-a + 7v-7b = 25$$

$$u^2 - 2au + a^2 + 3v^2 - 6vb + 3b^2 + 2uv - 2bu - 2av + 2ab + u - a + 7v - 7b = 25$$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 1 = 0 \\ -6b - 2a + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{sistema lineare non omogeneo. Risolvendo trovo } a \text{ e } b.$$

Sostituendo, quello che rimane è una forma quadratica in u e v uguale ad una costante

$$q(u, v) = \text{costante}$$

Questa la studio come prima.

Alla fine sarà ellisse / iperbole con centro fuori dall'origine

— o — o —

Come fare "funzioni strane" di matrici quadrate

$$e^A$$

$$\sin A$$

$$\cos A$$

L'idea è di usare gli sviluppi di Taylor

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \frac{1}{24} A^4 + \dots$$

Se per caso A fosse diagonalizzabile, cioè

$$M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora basta fare l'esponenziale degli elementi sulla diagonale

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\sin D = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin \lambda_n \end{pmatrix}$$

A quel punto

$$M^{-1} e^A M = e^D \quad \rightsquigarrow \quad e^A = M e^D M^{-1}$$

Stessa cosa per $\sin$ e $\cos$ e ogni altra funzione sviluppabile con Taylor.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 60

Titolo nota

19/12/2014

CAMBI DI BASE E ALGORITMO JPEG - MP3

Foto digitale = 3 matrici (la dimensione della matrice dipende dai pixel della foto)

Il colore di un pixel è rappresentato da 3 numeri RGB.

Ogni numero varia da 0 a 255.

Senza compressione una foto 1000×2000 sono $2 \cdot 10^6 \cdot 3$ Byte ~ 6 MB

Come posso risparmiare

1ª semplificazione Facciamo finta che sia in B/N: in ogni pixel c'è un numero solo, da 0 a 255.

2ª operazione L'immagine viene divisa in blocchi 8×8 .

3ª operazione: simmetrizzazione. Togliendo 127 si ottengono tutti numeri tra -128 e 128

Lo spazio delle matrici 8×8 è uno sp. vett. di dim. 64. I numeri che voglio trasmettere sono componenti rispetto alla base canonica

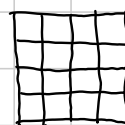
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \dots$$

Come posso risparmiare di un fattore 4 (file 4 volte + piccolo)

1ª strategia banale Raggruppo la matrice 8×8

in 16 quadratini 2×2 e su ogni quadratino

metto lo stesso numero (la media o uno dei quattro)



2ª strategia banale Riduco la finetza del campionamento, passando dalla scala

0, 1, 2, ..., 255 alla scala 0, 4, 8, 12, ..., 252
 $\leadsto$ 0, 1, 2, ..., 63

Entrambe le strategie compromettono la qualità dell'immagine in modo drastico.

3ª strategia Prendo una base diversa nello spazio delle matrici

$U_1, U_2, \dots, U_{64}$

Ogni matrice 8×8 sarà ancora comb. lin. di queste

$$M = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_{64} U_{64}$$

Delle 64 componenti spedisco solo le prime 16, pensando che siano "più importanti delle altre"

Ancora meglio: spedisco "bene" le prime componenti e man mano che vado avanti diminuisco il campionamento sulle altre

Come trovo una base interessante? Come base ortogonale che diagonalizza una opportuna applicazione lineare simmetrica

$$f: M_{8 \times 8} \rightarrow M_{8 \times 8}$$

Volendo f sarebbe rappresentata da una matrice simmetrica 64×64

Come si costruisce l'applicazione simmetrica! CASO DEI VETTORI.

Prendiamo un vettore (diciamo lungo 8 o 4) e sostituiamo ogni elemento con la somma dei vicini

$$(a, b, c, d) \rightarrow (a+b, a+c, b+d, c+d)$$

Per decidere i vicini di a e d si estende il vettore per riflessione

$$d \ c \ b \ a \mid (a, b, c, d) \mid d \ c \ b \ a$$

Autovalori e autovettori si calcolano bene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici è la stessa cosa, solo che sostituisco ogni casella della matrice 8×8 con la somma dei 4 vicini (al bordo uso il solito trucco della riflessione)



Otengo una matrice simmetrica i cui autovettori sono una base

[Qui vedi wiki in inglese o il video per ulteriori commenti].