

Esercizio Che cosa rappresenta l'equazione

$$2x^2 + 5y^2 + 6xy = 10$$

come insieme nel piano cartesiano.

Senza il termine misto sarebbe un'ellisse. I termini a $6x$ sono una forma quadratica nelle variabili (x, y) . Quando la segnatura

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} + & + & + \\ \uparrow & \text{P} & \text{P} \\ \text{d'ufficio} & & \end{matrix} \quad \text{Segnatura: } (2, 0, 0) \quad ++$$

Cambiando opportunamente base, questa diventa la forma $x^2 + y^2$.

Grazie al teorema spettrale posso cambiare base in maniera
ortogonale e scrivere la forma quadratica come

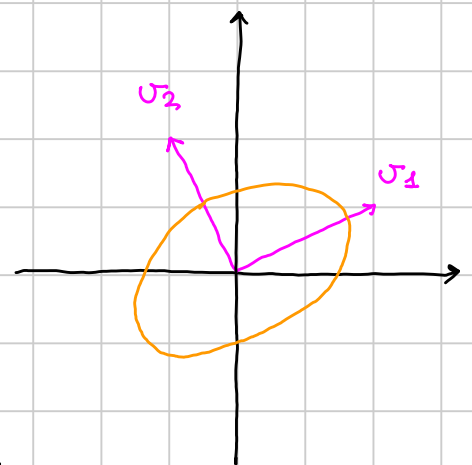
$$\lambda x^2 + \mu y^2$$

due autovalori positivi

In questa nuova base l'equazione diventa

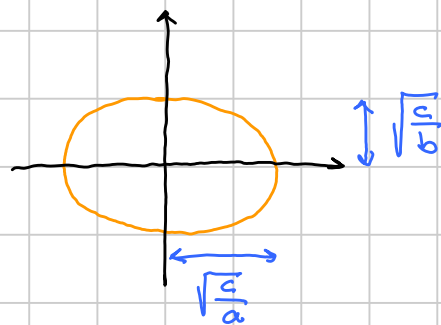
$$\lambda u^2 + \mu v^2 = 10$$

L'equazione originaria rappresenta un'ellisse che è in posizione standard rispetto ad una nuova base ortogonale v_1, v_2 . Per trovare v_1 e v_2 basta trovare gli autovettori della matrice.



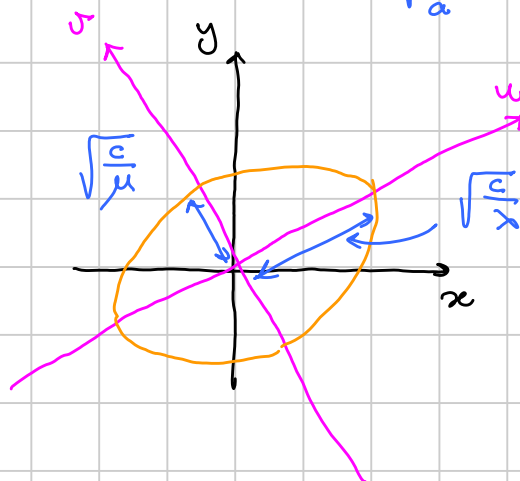
Conoscendo gli autovalori della matrice, posso determinare le lunghezze dei semiassi

In "posizione canonica" se ho
 $ax^2 + by^2 = c$



Quando è "storta", allora si fa lo stesso rispetto alla base "girata"

$$\lambda u^2 + \mu v^2 = c$$



Esempio 2

$$2x^2 + 4y^2 + 6xy = 10$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

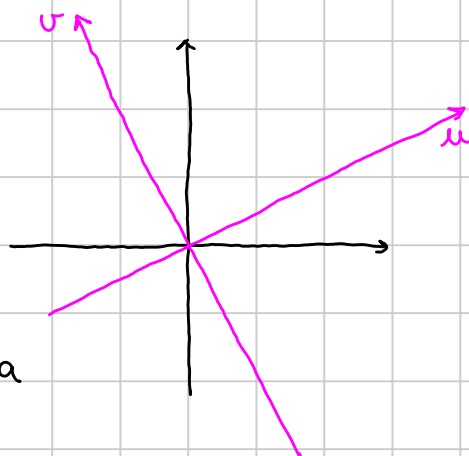
$$\text{Det} = 8 - 9 < 0 \Rightarrow \text{autovalori } + -$$

Rispetto alla base data dal teorema spettrale $\{v_1, v_2\}$

l'equazione diventa

$$\lambda u^2 - \mu v^2 = 10$$

λ, μ positivi



Gli asintoti dell'iperbole corrispondono alle rette su cui la forma quadratiche si annulla

$$2x^2 + 4y^2 + 6xy = 0 \rightsquigarrow x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 = 0$$

$$(x - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$$

$$(x - \frac{3}{2}y + \frac{y}{2})(x - \frac{3}{2}y - \frac{y}{2}) = 0 \quad (x - y)(x - 2y) = 0$$

Gli asintoti sono le rette

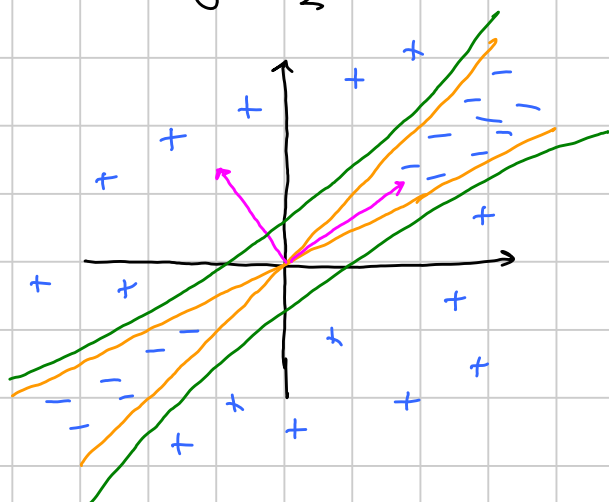
$$x - y = 0$$
$$x - 2y = 0$$

$$y = x$$
$$y = \frac{x}{2}$$

Se l'eq. è del tipo

$$\lambda u^2 - \mu v^2 = 10$$

l'iperbole vive
nella zona +



L'iperbole interseca l'asse $v=0$,
quindi l'asse generato
dall'autovettore corrispondente
all'autovalore positivo

Esempio 3 $3x^2 + 5y^2 = 7$

autovalori sono ++

Si può cambiando base farla diventare

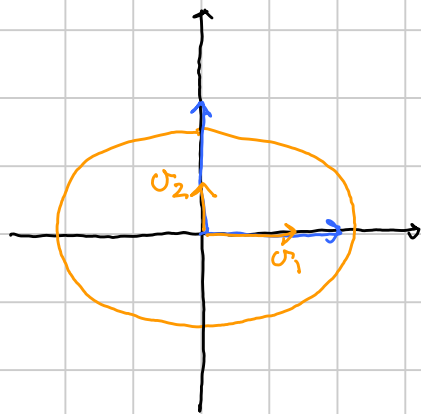
$$u^2 + v^2 = 7$$

In questo caso basta porre

$$(\underbrace{\sqrt{3}x}_u)^2 + (\underbrace{\sqrt{5}y}_v)^2 = 7$$

Geometricamente corrisponde a dilatare in
maniera i due assi.

Questa è l'azione tipica di una matrice
diagonale: cambiare scala in modo su vari
assi.



— o — o —

Esempio 4 $x^2 + 3y^2 + 2xy + x + 7y = 25$

Idea: fare una traslazione in modo da fare sparire i termini di
primo grado.

Pongo

$$u = x + a$$

$$x = u - a$$

$$y = y + b$$

$$y = v - b$$

$$(u-a)^2 + 3(v-b)^2 + 2(u-a)(v-b) + u-a + 7v-7b = 25$$

$$u^2 - 2au + a^2 + 3v^2 - 6vb + 3b^2 + 2uv - 2bu - 2av + 2ab + u - a + 7v - 7b = 25$$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 1 = 0 \\ -6b - 2a + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{sistema lineare non omogeneo. Risolvendo trovo } a \text{ e } b.$$

Sostituendo, quello che rimane è una forma quadratica in u e v uguale ad una costante

$$q(u, v) = \text{costante}$$

Questa la studio come prima.

Alla fine sarà ellisse / iperbole con centro fuori dall'origine

— o — o —

Come fare "funzioni strane" di matrici quadrate

$$e^A$$

$$\sin A$$

$$\cos A$$

L'idea è di usare gli sviluppi di Taylor

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \frac{1}{24} A^4 + \dots$$

Se per caso A fosse diagonalizzabile, cioè

$$M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora basta fare l'esponenziale degli elementi sulla diagonale

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\sin D = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin \lambda_n \end{pmatrix}$$

A quel punto

$$M^{-1} e^A M = e^D \quad \rightsquigarrow \quad e^A = M e^D M^{-1}$$

Stessa cosa per $\sin$ e $\cos$ e ogni altra funzione sviluppabile con Taylor.

— o — o —