

Esempio 1 Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano di equazione $z = 3$.

Strategia generale:

- considero un p.to P sul piano
- considero la simmetria S rispetto al piano // passante per l'origine ($z=0$ in questo caso)
- faccio il solito spostamento

$$\boxed{x \rightsquigarrow x-P \rightsquigarrow S(x-P) \rightsquigarrow S(x-P)+P}$$

$\uparrow$ spostato l'origine in P $\uparrow$ faccio la simmetria $\uparrow$ riporto l'origine dove stava all'inizio

Ad esempio $P = (0, 0, 3)$ (ma potevo prendere $P = (-1, 7, 3)$)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3-z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6-z \end{pmatrix}$$

x $x-P$ $S(x-P)$ $S(x-P)+P$

L'espressione è $(x, y, z) \rightarrow (x, y, 6-z)$

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x=8$

Con gli stessi conti otteniamo $(x, y, z) \rightarrow (16-x, y, z)$

— 0 — 0 —

Esempio 3 Cosa succede facendo prima la simmetria risp. a $z=3$ e poi la simmetria rispetto a $x=8$.

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, 6-z) \rightarrow \underline{(16-x, y, 6-z)}$$

che cosa rappresenta?

Calcolo i p.ti fissi:

$$\begin{cases} 16-x = x \\ y = y \\ 6-z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=\text{libero} \\ z=3 \end{cases}$$

Le soluzioni sono un sottospazio di dimensione 1 : $(8, t, 3)$
oppure $(8, 0, 3) + t(0, 1, 0)$
retta

La composizione è una rotazione intorno alla retta che rappresenta l'intersezione tra i 2 piani (è la retta che passa per $(8, 0, 3)$ ed è parallela all'asse y). L'angolo di rotazione lo vedo dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{-1} & 0 & \textcircled{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{0} & 0 & \textcircled{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rotazione di } 180^\circ \text{ nel piano } xz$$

(sarebbe $-\text{Id}$ in quel piano)
— 0 — 0 —

Oss. In generale componendo due simmetrie si ottiene una rotazione, componendo due rotazioni si ottiene ancora una rotazione
— 0 — 0 —

Come determino l'immagine di un piano o di una retta?

Esempio Prendo la trasf. di prima $(x, y, z) \rightarrow (16-x, y, 6-z)$ e mi chiedo dove finisce il piano $x + y - 3z = 5$?

Soluzione bovina : prendo 3 p.ti sul piano, li sostituisco e scrivo l'equazione del piano che passa per i trasformati

Soluzione alternativa : scrivo il piano in parametrica e poi sostituisco

$$x+y-3z=5 \leadsto (5, 0, 0) + t(1, -1, 0) + s(3, 0, 1) \\ = (5+t+3s, -t, s)$$

Sostituisco nella trasformazione e trovo

$$(11-t-3s, -t, 6-s) = (11, 0, 6) + t(-1, -1, 0) + s(-3, 0, -1)$$

Da qui volendo ottengo la cartesiana dell'immagine.

Come determino la controimmagine di un piano o di una retta?

1° modo (brutto) : controimmagine di 2 o 3 pti

2° modo : cerco la parametrica iniziale a coeff. incogniti, sostituisco e trovo i coefficienti

3° modo (per i piani) : "le cartesiane vanno bene indietro"

Se voglio la controimmagine del piano $x+y-3z=5$ rispetto alla trasformazione $(x, y, z) \rightarrow (16-x, y, 6-z)$ basta calcolare

$$\overset{x}{(16-x)} + \overset{y}{(y)} - 3\overset{z}{(6-z)} = 5$$

$$16-x+y-18+3z=5 \leadsto -x+y+3z=7$$

Verifica, controllare che l'immagine di $-x+y+3z=7$ sia proprio $x+y-3z=5$.

— o — o —

Esercizio Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ le rette

$$r_1: (1, 0, 2) + t(3, 1, 1)$$

$$r_2: (2, 1, 1) + t(1, 0, 3)$$

1ª domanda: posizione reciproca

Le velocità non sono multiple, quindi sono incidenti o sghembe. Come decido? Vedo se si incontrano!

Metto a sistema usando due parametri diversi

$$(1, 0, 2) + t(3, 1, 1) = (2, 1, 1) + s(1, 0, 3)$$

$$t(3, 1, 1) - s(1, 0, 3) = (1, 1, -1)$$

Voglio sapere se l'ultimo è comb. lin. dei primi 2, quindi calcolo

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 + 1 + 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow \text{sono sghembe}$$

2ª domanda: come trovo la distanza tra le 2 rette e i due punti $P \in r_1$ e $Q \in r_2$ che la realizzano?

1º modo Soivo la distanza² tra 2 p.ti generici delle rette

$$P = (1+3t, t, 2+t)$$

$$Q = (2+s, 1, 1+3s)$$

$$\text{dist}^2(P, Q) = (3t-s-1)^2 + (t-1)^2 + (1+t-3s)^2$$

Ora cerco t ed s in modo che tutto questo risulti minimo.

L'idea è di scrivere l'espressione come somma di quadrati in cui solo il primo contiene t e il secondo contiene s .

2° modo Cerco t e s in modo che $P-Q$ sia $\perp$ alle direzioni delle due rette.

$$P-Q = (3t-s-1, t-1, 1+t-3s) \leftarrow \text{congiungente } P \text{ e } Q$$

Impongo che sia $\perp$ alle due direzioni $(3,1,1)$ e $(1,0,3)$. Ottengo

$$\begin{cases} 9t-3s-3+t-1+1+t-3s=0 \\ 3t-s-1+3+3t-3s=0 \end{cases} \leadsto \text{risolvo trovando } t \text{ e } s \text{ e ho i pti che minimizzano la distanza.}$$

3° modo Scrivo il piano che contiene r_2 e non interseca r_1

$$\underbrace{(2,1,1) + t(1,0,3)}_{\text{contiene } r_2} + \underbrace{s(3,1,1)}_{\text{parallelo ad } r_1}$$

Calcolo ora la distanza di un qualunque pto di r_1 , ad esempio il pto base, da questo piano. Questo ultimo pto. è facile,

— o — o —