

Esempio Rotazione di 30° intorno all'asse y in un verso giudicato antiorario da un osservatore in piedi lungo il semiasse positivo delle y .

Cerco v_1, v_2, v_3 con $v_3 = (0, 1, 0)$ e $\{v_1, v_2\}$ base ortonormale del piano xz

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (0, 0, 1),$$

va bene o bisogna scambiarli? Devo controllare $\text{Det}(v_1|v_2|v_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 : \text{devo scambiare } v_1 \text{ e } v_2,$$

Vera base: $v_1 = (0, 0, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0), \quad v_3 = (0, 1, 0)$

La forma canonica della rotazione è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

La matrice A dalla base canonica alla base canonica è

$$(v_1|v_2|v_3) R (v_1|v_2|v_3)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

← l'inversa è la trasposta

Rotazione risp. ad una retta seguita da simmetria rispetto al piano $\perp$

Tutto come nel caso della rotazione, solo che in fondo c'è -1

rotazione in un piano

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

simmetria rispetto al piano $\perp$ alla retta

— o — o —

Domanda 2 : data la matrice ortogonale A , come capisco di cosa si tratta geometricamente?

Quando autovalori ed autovettori

- se 1 è autovalore con mult. 3, allora $A = Id$
- se 1 è autovalore con mult. 2, allora A è simmetria rispetto all'autospazio di 1 (che è un piano)
- se 1 è autovalore con mult. 1, allora A è rotazione rispetto alla retta che è l'autospazio di 1 . Gli altri 2 autovalori saranno del tipo $\cos\theta \pm i\sin\theta$ e θ è l'angolo di cui sto ruotando (possono essere reali se $\theta = 180^\circ$)
- se 1 non è autovalore, allora -1 è autovalore, e siamo di fronte ad una rotazione seguita da simmetria. L'asse di rotazione è generato da un autovettore di -1 e l'angolo di rotazione è descritto dagli altri 2 autovalori che sono del tipo $\cos\theta \pm i\sin\theta$ (possono essere -1 se $\theta = 180^\circ$).

Occhio : $A = -Id$ rientra in questo ultimo caso.

— o — o —

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \quad \text{è una matrice ortogonale (le colonne sono ortogonali e di norma 1)}$$

Rappresenta la trasformazione $(x, y, z) \rightarrow (y, -x, -z)$

Cerco gli autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{Det: } -\lambda^2(\lambda+1) - (\lambda+1) \\ = -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

$$\text{Autovalori: } \lambda = -1 \quad \lambda = \pm i$$

A = rotazione di 90° rispetto ad una retta, seguita da simmetria rispetto al piano $\perp$.

Quale retta? Devo trovare un autovettore di -1 . Metto $\lambda = -1$ nella matrice $A - \lambda Id$ e cerco una base del ker

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ha rango 2, e una base del ker è } (0, 0, 1)$$

Tornando alla matrice iniziale, la vediamo con occhi diversi

rotazione di 90° ORARIA per
un semiasse in piedi lungo il
semiasse positivo
della z

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

↑
ribaltamento rispetto
al piano xy

— 0 — 0 —

Caso generale in cui $f(0) \neq 0$ $f(x) = Ax + b$

Classificazione completa delle isometrie

Come nel caso del piano, dipende dall'insieme dei p.ti fissi, cioè dalle soluzioni di $f(x) = x$, cioè $Ax + b = x$, cioè $(A - Id)x = -b$ che è un sistema lineare non omogeneo.

1° caso Punti fissi = tutto $\mathbb{R}^3 \leadsto f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$
($A = Id$, $b = 0$)

2° caso Unico p.to fisso $\leadsto$ rotazione rispetto ad una retta seguita da simmetria rispetto ad un piano $\perp$ alla retta. La retta ed il piano si incontrano nel p.to fisso.

3° caso Punti fissi = una retta $\leadsto$ rotazione di un certo angolo intorno alla retta. L'angolo di rotazione si vede dagli autovalori $\cos \theta \pm i \sin \theta$ della matrice.

4° caso Punti fissi = un piano $\leadsto$ simmetria rispetto al piano

5° caso Non ci sono p.ti fissi. Ci sono 3 sottocasi:

5.1 $\leadsto$ traslazione $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$.

5.2 $\leadsto$ simmetria rispetto ad un piano seguita da traslazione in una direzione parallela al piano.

5.3 $\leadsto$ rotazione intorno ad una retta seguita da traslazione nella direzione della retta

Come capisco, data l'espressione algebrica $Ax+b$, in quale caso mi trovo?

→ Determino i p.ti fissi risolvendo il sistema $Ax+b=x$

→ se sono in uno dei primi 4 casi, è fatta

→ se sono nel quinto caso quando la matrice A , ed in particolare quando la mg dell'autovalore 1

- $\text{mg} = 3 \rightsquigarrow 5.1$

- $\text{mg} = 2 \rightsquigarrow 5.2$

- $\text{mg} = 1 \rightsquigarrow 5.3$

— o — o —