

Isometrie in $\mathbb{R}^3$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che conservano la distanza

Algebricamente: $f(x) = Ax + b$
 $\uparrow$
 matrice 3×3 ortogonale

Come sono fatte le matrici 3×3 ortogonali?

Domanda equivalente: come sono fatte tutte le isometrie che mandano l'origine in sé?

Sono sostanzialmente di 4 tipi

- identità
- simmetria rispetto ad un piano per l'origine
- rotazione rispetto ad una retta che passa per l'origine
- rotazione rispetto ad una retta + simmetria risp. al piano $\perp$ alla retta

Fatto 1 Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice ortogonale, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$

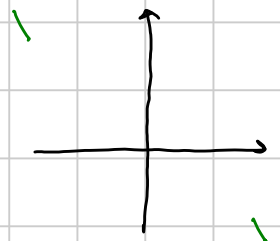
Dim. Sia v un corrispondente autovettore, cioè $Av = \lambda v$.
 Poiché A è ortogonale deve essere $|Av| = |v|$, ma allora
 $|Av| = |\lambda v| = |\lambda| \cdot |v| = |v| \Rightarrow |\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$

Fatto 2 Una matrice 3×3 ha per forza un autovalore reale

Dim. Il polinomio caratteristico è del tipo $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \dots$
 quindi

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_A(\lambda) = -\infty \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p_A(\lambda) = +\infty$$

quindi per esistenza degli zeri c'è una radice



Conseguenza: almeno un autovettore è $+1$ oppure -1 .

- Se c'è l'autovalore 1 con molteplicità 3 , allora $A = \text{Identità}$
- Se c'è l'autovalore -1 " " " , allora $A = -Id$ e siamo nel quanto caso (rotazione risp. asse z di 180° seguita da simmetria risp. piano xy)
- Se c'è l'autovalore 1 con molteplicità 2 , allora l'altro autovale è per forza -1 . Ma allora c'è un piano che resta fisso (l'autospazio di 1) e una direzione che viene ribaltata (l'autospazio di -1). Si può verificare che la direzione è ortogonale al piano, quindi si tratta della simmetria rispetto al piano
- Se c'è l'autovalore -1 con molt. 2 , allora il 3° è per forza 1 . Quindi si tratta della rotazione di 180° rispetto alla retta fissa (l'autospazio di 1)
- Se c'è l'autovalore 1 con molteplicità 1 , allora o siamo nel caso precedente o gli altri 2 sono complessi coniugati. Allora è una rotazione risp. alla direzione fissa.
- Se c'è l'autovalore -1 con molteplicità 1 , allora o siamo in un caso precedente, o gli altri 2 sono complessi coniugati. Quindi c'è una direzione che va in meno se stessa (l'autospazio di -1) e una rotazione rispetto alla direzione stessa.

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x - y + 2z = 0$

Esempio 0 Scrivere la simmetria rispetto al piano xy ($z=0$)

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 0.1 Scrivere la simmetria rispetto al piano yz ($x=0$)

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Back to esempio 1 ① Scrivo una base ortonormale (o anche solo ortogonale) di $\mathbb{R}^3$ fatta da 3 vettori v_1, v_2, v_3 tali che $\text{span}(\{v_1, v_2\}) = \text{piano}$

② In questa nuova base la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

③ Riporto tutto in base canonica con un cambio di base.

Facciamo il conto per il piano $x - y + 2z = 0$

① $v_1 = (1, 1, 0)$ } base del piano

$v_2 = (2, 0, -1)$

$v_3 = (1, -1, 2)$ ← vettore ortogonale al piano

Già con questa base posso procedere perché la matrice è quella canonica C in questa base.

③ La matrice A rispetto alla base canonica sarebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Variazione: se volessi v_1, v_2, v_3 base ortogonale, come potrei fare?

1° modo: uso GS sulla precedente

2° modo: Osservo che v_1 e v_3 sono già ortogonali tra di loro e produco v_2 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2, -2, -2) \rightsquigarrow (1, -1, -1)$$

Riassumendo, una base ortogonale è

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{base del piano}$$

$$v_2 = (1, -1, -1)$$

$$v_3 = (1, -1, 2) \quad \perp \text{ al piano}$$

Ora se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M,$$

allora l'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_M$

Quindi: divido la 1ª riga per 2, la 2ª per 3 e la 3ª per 6.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

In alternativa potrei:

→ dividere le colonne di M per le norme $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$

→ dividere le righe della trasposta per le stesse norme

— 0 — 0 —