

Componenti rispetto ad una base ortonormale

Sia V uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare definito positivo. Sia $u_1, \dots, u_m$ una base ortonormale. Sia $v \in V$ un vettore qualunque.

Allora la componente di v risp. a u_i è $\langle v, u_i \rangle$, cioè

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_m \rangle u_m$$


 coeff. della comb. lineare

Esempio Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni che sono comb. lineari di

$\{\sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x)\}$
 cioè di tutte le funzioni del tipo

$$f(x) = a \sin x + b \sin(2x) + c \sin(3x) + d \cos x + e \cos(2x) + f \cos(3x).$$

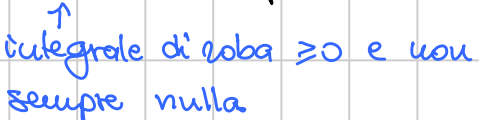
Si può dim. che V è uno spazio vettoriale di dim. 6.

Considero su V il prodotto scalare

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

Si verifica che è un prodotto scalare ed è definito positivo in quanto

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx > 0 \quad \text{se } f \neq 0$$


 integrale di cosa ≥ 0 e non sempre nulla

Non solo: quella scritta (cioè $\sin x, \dots, \cos(3x)$) è una base ortogonale

Infatti

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(rx) dx = 0 \quad \text{se } k \neq r \text{ interi}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(rx) dx = 0 \quad \text{sempre}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(rx) dx = 0 \quad \text{se } k \neq r \text{ interi}$$

Per dimostrarlo, basta usare le formule che trasformano prodotti in somme, e osservare che $\sin(mx)$ o $\cos(mx)$ hanno sempre integrale nullo fra 0 e 2π .

Applicazioni simmetriche

Def. Sia V uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare che indichiamo con $\langle u, v \rangle_B$.

Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ si dice simmetrica se

$$\langle f(u), v \rangle_B = \langle u, f(v) \rangle_B$$

Brutalmente: f migra nei B -prod. scalari

per ogni u e v in V .

Sia $v_1, \dots, v_n$ una base in V , sia B la matrice associata al prod. scalare, sia A la matrice associata ad f . Quali relazioni verificano A e B ?

Sia x il vettore delle componenti di u

Sia y il vettore delle componenti di v

Le componenti di $f(u)$ sono Ax , le componenti di $f(v)$ sono Ay

$$\begin{aligned} \langle f(u), v \rangle_B &= (Ax)^t B y \\ &= x^t A^t B y \end{aligned} \quad \langle u, f(v) \rangle_B = x^t B A y$$

Uguagliando si ottiene

$$A^t B = B A$$

Caso particolare: se il prodotto scalare è definito positivo e la base è ortonormale, allora $B = Id$ e quindi la relazione diventa $A^t = A$.

Quindi: un'applicazione lineare simmetrica rispetto ad un prodotto scalare def. pos. ha la matrice simmetrica se la base che uso è B -ortonormale.

Teorema B -spettrale Sia V uno spazio vettoriale
Sia $\langle u, v \rangle_B$ un prod. scalare def. pos. su V
Sia $f: V \rightarrow V$ lineare B -simmetrica
Allora V ammette una base B -ortonormale costituita da autovettori di f .

Oss. La dimostrazione è del tutto analoga al caso del prodotto scalare classico.

Teorema B -spettrale (Versione matriciale).

Sia B una matrice simmetrica definita positiva.

Sia A una matrice tale che $A^t B = B A$. EK questa ti non c'è (conetto dopo video)

Allora esiste una matrice M invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \text{Diagonale}$$

$$M^t B M = \text{Identità}$$

→ le colonne sono autovettori

→ le colonne sono una base B -ortonormale

Oss. La matrice M fa contemporaneamente 2 cose

① diagonalizza A nel senso della similitudine

② sylvesterizza B nel senso della congruenza.

Oss. Se $B = Id$, quello scritto è il vecchio teorema spettrale con ipotesi $A^t = A$ e tesi $M^{-1} A M = \text{Diagonale}$ e $M^t = M^{-1}$, cioè M ortogonale.

Esercizio Consideriamo $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ con il prodotto scalare

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

Sia $V = \text{Span} \{x^2 + 3x\}$.

Determinare una base ortogonale di $V^\perp$.

1° passo Trovo la matrice B risp. alla base $\{1, x, x^2\}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{conti come alla lezione 48.}$$

2° passo Trovo una base di $V^\perp$. Chiamato (a, b, c) il generico elemento di $V^\perp$, impongo le equazioni: (a, b, c) B -ortogonale a $(0, 3, 1)$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{2}{3}a + 2b + \frac{2}{5}c}$$

↑
Equazione
Cartesiana
di $V^\perp$

Per trovare una base basta trovare una base delle soluzioni, ad esempio $(3, -1, 0)$ e $(0, 1, -5)$

(se li volessi come polinomi sarebbero $3-x$ e $x-5x^2$)

3° passo Ortogonalizzo la base appena ottenuta con GS

$$v_1 = (3, -1, 0)$$

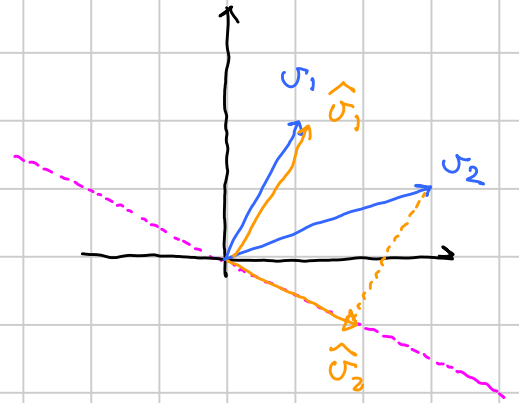
$$v_2 = (0, 1, -5) - \frac{\langle (0, 1, -5), (3, -1, 0) \rangle_B}{\langle (3, -1, 0), (3, -1, 0) \rangle_B} (3, -1, 0)$$

↑
Num. e denom. si calcolano
facilmente con la matrice.

Oss. Quando ho 2 vettori v_1 e v_2 , qual è l'effetto "geometrico" di GS?

v_1 resta inalterato

$\hat{v}_2$ diventa la proiezione di v_2 sullo spazio ortogonale a v_1 .



Se ho + vettori la cosa è analoga:

$\hat{v}_3$ sarebbe la proiezione di v_3 su $\text{Span}(v_1, v_2)^\perp$.

— o — o —