

Forme canoniche di applicazioni lineari

Dato una matrice A , trovare $\hat{A}$ simile ad A il più semplice possibile, cioè trovare M invertibile t.c. $M^{-1} A M$ sia più semplice possibile

Risposta: jordan reale o complessa (o ancora meglio diagonalizzazione)

Forme canoniche di prod. scalari

Dato un prod. scalare in V , trovare una base in cui la matrice sia particolarmente semplice.

In termini di matrici: data una B simmetrica, trovare una M invertibile tale che $M^t B M$ sia più semplice possibile

Prima risposta: poiché B è simmetrica, per il teo. spettrale sappiamo che esiste M ortogonale tale che

$$\begin{array}{l} M^{-1} B M = \text{Diagonale} \\ \uparrow \leftarrow M \text{ è ortogonale} \quad \uparrow \text{ stessa} \\ M^t B M = \text{Diagonale} \end{array}$$

Quindi ogni matrice simmetrica è simile, ma anche congruente, ad una matrice diagonale. Posso scegliere M usando come colonne gli autovettori di B .

Seconda risposta (Sylvesterizzazione) Ogni matrice simmetrica B è congruente (non necessariamente simile) ad una matrice diagonale che ha sulla diagonale solo $+1, -1, 0$,
Inoltre il numero di $+1, -1, 0$ è la segnatura della forma associata.

Oss. Se B è definita positiva, allora è simile alla matrice identica.

In questo vuol dire che la base nuova è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare definito da B .

Per trovare una base ortonormale, basta usare GS rispetto al nuovo prodotto.

Esempio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Verifico che è definita positiva con Sylvester 3-2-1

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 3$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = 6$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$\underbrace{+}_{p} \underbrace{+}_{p} \underbrace{+}_{p} \Rightarrow \text{segno} (3, 0, 0)$$

Per trovare una base ortonormale, parto dalla canonica e uso GS

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

$$v_1 = e_1 = (1, 0, 0)$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{1} (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle_B}{\langle v_2, v_2 \rangle_B} v_2$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{1} (1, 0, 0) - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle_B}{\langle v_2, v_2 \rangle_B} (-1, 1, 0) =$$

$$= (0, 0, 1) - (1, 0, 0) + (-1, 1, 0)$$

$$\langle e_3, v_2 \rangle_B = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$
$$(1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2, 1, 1)$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Conclusione: una base ortogonale è $(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-2, 1, 1)$.
(Sarebbe utile fare la verifica).

Per esercizio verifichiamo che v_2 e v_3 sono ortogonali

$$\langle v_2, v_3 \rangle_B = (-1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Volendo una base ortonormale dovrei dividere per le B-norme, cioè

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\langle v_1, v_1 \rangle_B^{1/2}} = v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\langle v_2, v_2 \rangle_B^{1/2}} = v_2 = (1, -1, 0) \rightarrow \text{Bisogna fare } (1 \ -1 \ 0)_B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\langle v_3, v_3 \rangle_B^{1/2}} = (-2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto (-2 \ 1 \ 1)$$

$$(0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Riprova: usando $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ come colonne di M dovrei
"Sylvestrizzare"

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se B è definita positiva, posso Sylvesterizzare facendo

- ① base qualunque in partenza
- ② GS $\leadsto$ base ortogonale (basta per diagonalizzare)
- ③ Divido per le B -norme $\leadsto$ base ortonormale
- ④ Costruisco M usando come colonne la base ottenuta al pto 3

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Segnatura di B con Sylvester 1-2-3:

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1 \quad \text{Det}_{2 \times 2} = 1 \quad \text{Det}_{3 \times 3} = \text{negativo} \quad + + + -$$

Segnatura $(2, 1, 0)$.

Per prima cosa trovo un s.sp. di dim. 2 su cui è definita positiva.

Lo posso fare completando i quadrati oppure vedendo ad occhio

che $\text{Span}(\{e_1, e_2\})$ va bene.

$v_1 = e_1$ $v_2 = e_2$. Questi sono già B -ortonormali.

Per trovare v_3 io impongo di essere ortogonale a v_1 e v_2 , cioè

cerco $v_3 = (x, y, z)$ imponendo i 2 prod. scalari nulli

$$\langle v_3, e_1 \rangle = 0 \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{x + 10z = 0}$$

$$\langle v_3, e_2 \rangle = 0 \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

Una possibilità è $(10, 0, -1) = v_3$

Una base ortogonale è $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (10, 0, -1)$

Per ortonormalizzarla basta dividere v_3 per $(- \langle v_3, v_3 \rangle)^{1/2}$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = (10 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (10 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 99 \end{pmatrix} = -99$$

Quindi una base "ortonormale" è $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (\frac{10}{\sqrt{99}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{99}})$

Verifica finale con $M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| v_3 \right)$ si deve avere

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$