

PRODOTTI SCALARI IN GENERALE

Def. Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è un'applicazione bilineare simmetrica, cioè una funzione $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

(prende in input 2 vettori di V e restituisce un numero) che ha le seguenti proprietà (notazione standard $b(u, v) = \langle u, v \rangle$)

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ per ogni $u \in V$ e ogni $v \in V$

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \dots$ } lineare nella prima variabile

(iii) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$

(ii-bis) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

(iii-bis) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ } lineare nella seconda variabile

Oss. La (ii-bis) segue da (i) + (ii)

$$\langle u, \lambda v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}}}{=} \langle \lambda v, u \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(ii)}}}{=} \lambda \langle v, u \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}}}{=} \lambda \langle u, v \rangle$$

Analogamente, la (iii-bis) segue da (i) + (iii).

Esempio Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Dico che

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

è un prodotto scalare su V .

Devo fare le 3 verifiche semplici

(i) $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) \cdot p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle$
propr. iust.

(ii) $\langle \lambda p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 \lambda p(x) \cdot q(x) dx = \lambda \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx = \lambda \langle p(x), q(x) \rangle$
propr. iust.

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle &= \int_{-1}^1 [p_1(x) + p_2(x)] q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 p_1(x) q(x) dx + \int_{-1}^1 p_2(x) q(x) dx \\
 &= \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle.
 \end{aligned}$$

— o — o —

Supponiamo che $u_1, \dots, u_n$ sia una base di V . Se conosco il prodotto scalare fra elementi della base, cioè $\langle u_i, u_j \rangle$ al variare di i e j , allora lo conosco fra vettori in generale.

Esempio in cui $n=2$

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle &= \langle x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2 \rangle \quad (\text{uso lin. nella 1ª variabile}) \\
 &= x_1 \langle u_1, y_1 u_1 + y_2 u_2 \rangle + x_2 \langle u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2 \rangle \quad (\text{lin. nella 2ª}) \\
 &= x_1 y_1 \langle u_1, u_1 \rangle + x_1 y_2 \langle u_1, u_2 \rangle + x_2 y_1 \langle u_2, u_1 \rangle + x_2 y_2 \langle u_2, u_2 \rangle
 \end{aligned}$$

Se conosco i prodotti $\langle u_i, u_j \rangle$ posso calcolare $\langle u, v \rangle$

Inoltre si ha che

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Prodotti scalari e matrici

Dato un prodotto scalare, e data una base dello spazio V in cui è definito, posso costruire una matrice $B \in M_{n \times n}$ ponendo

$$b_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle \quad (\text{base è } u_1, \dots, u_n)$$

Questa matrice ha 2 proprietà fondamentali:

① è simmetrica $(b_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle = \langle u_j, u_i \rangle = b_{ji})$

② se il vettore x sono le comp. di u rispetto alla base e il vettore y sono le comp. di v rispetto alla base, allora

$$\langle u, v \rangle = x^t B y$$

Esempio Stesso esempio di prima. Scriviamo la matrice associata al prodotto scalare nella base

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

$$v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4$$

Devo calcolare 16 prodotti scalari (un po' meno se uso le simmetrie)

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \cdot dx = 2$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x \cdot dx = 0$$

↑
x è dispari

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle v_1, v_4 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^3 \cdot dx = 0$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \cdot dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle v_2, v_4 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x^3 \cdot dx = \frac{2}{5}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle v_4, v_4 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot x^3 \cdot dx = \frac{2}{7}$$

Usando la matrice B, calcolare il prodotto scalare tra $x^3 - x$ e $x^2 + 3x$.

Le componenti del 1° sono $(0, -1, 0, 1)$

Le componenti del 2° sono $(0, 3, 1, 0)$

Devo calcolare

$$(0 \ 3 \ 1 \ 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 3 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(0 \ 3 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$= 3 \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) = -2 + \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}$$

(controllare che venga lo stesso con l'integrale)

Osservazione Il prodotto scalare tra un vettore e se stesso è una forma quadratica.

Parallelismo con il passato

prod. scalare classico

$$x^t y$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

norma² = prodotto scalare di un vettore per se stesso

$\leadsto$ prodotto scalare generale

$$\leadsto x^t B y$$

$$\leadsto x^t B x = \text{forma quadratica}$$

Def. Si dice segno di un prodotto scalare la segno della forma quadratica ad esso associata.

Domanda: se io cambio base, come cambia la matrice associata ad un prodotto scalare?

Risposta: sia M la matrice di cambio di base, diciamo dalla nuova alla vecchia. Sia B la matrice del prodotto scalare nella base vecchia, e sia $\hat{B}$ la matrice del prodotto scalare nella base nuova.

Siano x e y le componenti di due vettori u e v nella base nuova.

Calcolo $\langle u, v \rangle$ nella nuova:

$$x^t \hat{B} y$$

Calcolo $\langle u, v \rangle$ nella vecchia: le componenti di u e v nella vecchia sono Mx e My , quindi

$$\langle u, v \rangle = (Mx)^t B (My) = x^t M^t B M y$$

Confrontando le 2 espressioni otteniamo

$$\hat{B} = M^t B M$$

relazione tra 2 matrici che rappresentano lo stesso prodotto scalare in 2 basi diverse

Achtung! Abbiamo usato matrici per 2 motivi totalmente diversi

① per rappresentare applicazioni lineari

② per rappresentare forme quadratiche e prodotti scalari

Sono 2 cose completamente diverse.

Ad esempio, cambiando base subisco una sorte diversa.

Nel caso ① una matrice A diventa

$$\hat{A} = M^{-1} A M \quad \leadsto \text{matrici simili}$$

Nel caso ② una matrice B diventa

$$\hat{B} = M^t B M \quad \leadsto \text{matrici CONGRUENTI}$$

— 0 — 0 —