

JORDAN REALE VS JORDAN COMPLESSA (come dedurre l'una dall'altra)

Esempio 1 Sia A matrice 2×2 con autovalori $3 \pm 4i$.

Qual è la forma canonica?

$$\begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{R}$$

La reale si deduce dalla complessa.

Esempio 2 A matrice reale 4×4 con autovalori $3 \pm 4i$, entrambi con $m_g = 1$.

Gli autovalori hanno $m_a = 2$ (entrambi) e $m_g = 1$, quindi A è diagonalizzabile, nemmeno in $\mathbb{C}$.

(Fatto generale: se A è una matrice reale che ha $a+ib$ come autovalore, allora ha anche $a-ib$ ed i due hanno le stesse m_a e m_g)

Su $\mathbb{C}$ avremo dei blocchi da 2:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3+4i & 1 \\ 0 & 3+4i \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3-4i & 1 \\ 0 & 3-4i \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Oss. Le matrici di partenza non possono essere simmetriche perché non hanno autovalori reali

Esempio 3 Una matrice simm. e una non simm. possono essere simili?

Certo! Basta prendere, per esempio, una matrice non simmetrica che sia diagonalizzabile. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{diagonalizzabile}$$

Esempio 4 $A = \begin{pmatrix} 7 & a & 9 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Per quali valori di a è diagonalizzabile?

La cosa che decide la diagonalizzabilità è $\mu_7(7)$.

$$\mu_7(7) = \dim(\ker(A - 7I))$$

$$A - 7I = \begin{pmatrix} 0 & a & 9 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $a = 0$, allora $\text{rank} = 1 \Rightarrow \dim(\ker) = 2 \Rightarrow \text{diag.}$

Se $a \neq 0$, allora $\text{rank} = 2$ $\Rightarrow$ addiz. diag.
 $\text{D-rank} = 2$

— 0 — 0 —

Facile: passa da jordan su $\mathbb{C}$ a jordan su $\mathbb{R}$

Domanda successiva: come ottenere la M che jordanizza su $\mathbb{R}$ dalla M che jordanizza su $\mathbb{C}$

— 0 — 0 —

Esempio 5

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

autovalori = $2 \pm i$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (5-\lambda)(-1-\lambda) + 10 &= -5 - 5\lambda + \lambda + \lambda^2 + 10 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 5 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

La forma canonica di A è

$$\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ su } \mathbb{R}$$

Come ottengo la M di passaggio. Su $\mathbb{C}$ basta calcolare gli autovettori

$$A - (2+i)Id = \begin{pmatrix} 3-i & -2 \\ 5 & -3-i \end{pmatrix}$$

Devo fare il ker che è $\text{Span}(2, 3-i)$

$$\text{Dovrei fare } \begin{pmatrix} 3-i & -2 \\ 5 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (3-i)x - 2y = 0 \\ 5x - (3+i)y = 0 \end{cases} \leadsto \text{vedo che una sol. è } x=2, y=3-i$$

Per tranquillità sostituisco nella 2a:

$$10 - (3+i)(3-i) = 0$$

Fatto generale! se $(2, 3-i)$ è autovettore relativo a $\lambda = 2+i$,
allora $(2, 3+i)$ è autovettore " " $\lambda = 2-i$

Quindi sui complessi la M di passaggio è $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix}$

La verifica da fare sarebbe che $D = M^{-1} A M$

Voglio ora trovare la N tale che $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = N^{-1} A N$

1° modo le colonne di N sono la base v_1, v_2 in cui l'applicazione ha la matrice di Jordan, cioè deve succedere che

$$\begin{cases} A v_1 = 2 v_1 - v_2 \\ A v_2 = v_1 + 2 v_2 \end{cases}$$

Posto $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ otteniamo un sistema di 4 equ. in 4 incognite

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2x - z \\ 5x - y = 2y - w \\ 5z - 2w = x + 2z \\ 5z - w = y + 2w \end{cases} \quad \begin{aligned} &Av_1 = 2v_1 - v_2 \\ &Av_2 = v_1 + 2v_2 \end{aligned} \quad \leadsto \text{risolvo e trovo } v_1 \text{ e } v_2$$

2° modo Ancora boninus $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} N$

cioè $N \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} N$ ora pongo $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

e impongo le 4 equazioni. Ottergo un sistema molto simile a quello di sopra.

3° modo Gli autovalori erano $2+i$ e $2-i$
Poss. autovettori erano $(2, 3-i)$ e $(2, 3+i)$.

Vuol dire che

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix} = (2+i) \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

$$A \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{D'altra parte} \quad (2+i) \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix} &= (2+i) \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Se uguaglio parte reale e parte immaginaria ottengo

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & ; & A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A v_1 &= 2 v_1 - v_2 & A v_2 &= v_1 + 2 v_2 \end{aligned}$$

Morale: i vettori v_1 e v_2 sono parte reale e parte immaginaria degli autovettori complessi (uno qualunque dei 2)

$$\text{Autovettori complessi} \rightsquigarrow (2, 3 \pm i) = \underbrace{(2, 3)}_{v_1} \pm i \underbrace{(0, 1)}_{v_2}$$

La matrice N che Jordanizza sui reali è

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificare la relazione che deve succedere !!

— 0 — 0 —