

POLINOMI E MATRICI

Data una matrice $A \in M_{n \times n}$, ha senso calcolare le potenze A^k , quindi ha senso anche calcolare somme di potenze, tipo

$$2A^3 + 5A^2 + 6A + 8\text{Id} \quad \rightsquigarrow \quad p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

Quindi, dato un qualunque polinomio $p(x)$, ha senso calcolare $p(A)$, che viene a sua volta una matrice $n \times n$.

Domanda 1 Data una matrice A , esistono dei polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$
 $\uparrow$
 matrice nulla

Risposta (semplice) Sì! Se io considero le matrici

$$\text{Id}, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$$

ho $n^2 + 1$ matrici che stanno in uno spazio di dim n^2 , quindi per forza sono lin. dip., cioè esistono dei numeri $c_0, c_1, \dots, c_{n^2}$ tali che

$$c_0 \text{Id} + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0 \leftarrow \text{matrice nulla}$$

I coeff sono per ipotesi non tutti nulli.

Ho così trovato un polinomio $p(x)$, di grado $\leq n^2$, che annulla la matrice.

— 0 — 0 —

Oss. Se $p(x)$ è tale che $p(A) = 0$, allora tutti i polinomi che sono multipli di $p(x)$ hanno la stessa proprietà.

— 0 — 0 —

Domanda 2 Data una matrice A , come sono fatti tutti i polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$?

La risposta è non banale ed è data dal seguente

Teorema misterioso Data una matrice $A \in M_{n \times n}$, tra tutti i $p(x)$ con $p(A) = 0$ ce n'è uno di grado più basso. Tutti gli altri sono multipli di questo polinomio di grado più basso.

Def. Data una matrice A , si definisce polinomio minimo $p_m(x)$ il polinomio di grado più basso tale che $p(A) = 0$.

Possiamo sempre fissare in modo che il coeff. del termine di grado max nel $p_m(x)$ sia 1.

Teorema misterioso (HAMILTON - CAYLEY)

Per ogni matrice $A \in M_{n \times n}$, sia $p(x)$ il polinomio caratteristico. Allora $p(A) = 0$. (cioè se sostituisco A nel pd. caratteristico ottengo 0)

Dim. completamente sbagliata $p(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$

Se al posto di λ metto A ... $p(A) = \det(A - A) = 0$

Ocdio! se fosse così semplice, funzionerebbe anche con la traccia.

— 0 — 0 —

Conseguenza dei 2 teoremi misteriosi Il polinomio caratteristico, poiché annulla la matrice, deve essere multiplo del polinomio minimo.

Di conseguenza: il polinomio minimo è un divisore del polinomio caratteristico, quindi ha grado $\leq n$.

Proprietà del polinomio minimo

Il polinomio minimo ha

- ① grado $\leq n$
- ② le stesse radici del polinomio caratteristico, solo eventualmente con molteplicità minore od uguale
- ③ la molteplicità di una radice λ come soluzione del polinomio minimo è uguale alla dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a quell'autovalore.

Conseguenze

- ① Se tutti gli autovalori sono diversi, allora polinomio minimo = polinomio caratteristico
- ② Se la matrice A è diagonalizzabile, allora tutte le radici del polinomio minimo hanno molteplicità = 1.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{pol. caratt.} = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\text{pol. minimo} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{pol. caratt.} = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\text{pol. minimo} = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

Esempio A matrice 4×4 . Ha come solo autovalore 2 con $m_A(2) = 4$

Quali sono le possibili forme canoniche?

- 1 blocco da 4

$$m_g = 1$$

- 3+1

$$m_g = 2$$

- 2+2

$$m_g = 2$$

- 2+1+1

$$m_g = 3$$

- 1+1+1+1

$$m_g = 4$$

} Se $m_g = 2$, allora non so decidere tra 3+1 o 2+2.

Per decidere guardo il polinomio minimo! se è $(\lambda-2)^3$ allora è 3+1, se è $(\lambda-2)^2$ allora è 2+2.

Per capire se il polinomio minimo è $(\lambda-2)^2$ oppure $(\lambda-2)^3$, calcolo $A-2Id$ e vedo se facendola al quadrato viene 0. Vediamo il polinomio minimo nei vari casi:

- 4 $p_m(x) = (\lambda-2)^4$
- $3+1$ $p_m(x) = (\lambda-2)^3$
- $2+2$ $p_m(x) = (\lambda-2)^2$
- $2+1+1$ $p_m(x) = (\lambda-2)^2$
- $1+1+1+1$ $p_m(x) = (\lambda-2)$

Esercizio Trovare un caso in cui polinomio caratteristico, polinomio minimo e ug non bastano per decidere la forma canonica.

Esempio Come sono fatte tutte le matrici 3×3 tali che $A^2 = Id$?

La condizione è equivalente a $A^2 - Id = 0$, cioè a dire che il polinomio $x^2 - 1$ annulla la matrice.

Ma allora il polinomio minimo deve essere un divisore di $x^2 - 1$.

Abbiamo 3 casi

- 1° caso: $p_m(x) = (x-1)$, cioè $A - Id = 0$, cioè $A = Id$
- 2° caso: $p_m(x) = (x+1)$, cioè $A + Id = 0$, cioè $A = -Id$
- 3° caso: $p_m(x) = (x^2-1) = (x+1)(x-1)$

Poiché sono radici semplici, per forza la matrice sarà diagonalizzabile con 1 e -1 come autovalori.

Sono rimasti, a livello di forma canonica, due casi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Se fosse risp. alla} \\ \text{base canonica} \\ \text{sarebbe la simmetria} \\ \text{rispetto al piano } xy \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{lascio fissa la} \\ x \text{ e faccio la} \\ \text{simul. risp. all'origi-} \\ \text{ne nel piano } yz. \end{array}$$

In generale avremo la stessa cosa rispetto ad una base v_1, v_2, v_3 che sta nelle colonne della P che diagonalizza.