

Vedere in che senso completare i quadrati dà più informazioni

Esempio $q(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6xy$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

① Trovare la segnatura

$$\det A = 4 - 9 = -5 < 0 \Rightarrow \text{autovalori : } +, -$$

$$\Rightarrow \text{segnatura } (1, 1, 0)$$

② Trovare un s.s.p. di dim 1 su cui è positiva
 " " " " " -1 su cui è negativa

Completare i quadrati:

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2 - 6xy + 4y^2 \\ &= x^2 - 6xy + 9y^2 - 9y^2 + 4y^2 \\ &= (x - 3y)^2 - 5y^2 \end{aligned}$$

Se voglio segno + basta imporre $y = 0 \leadsto \text{Span}\{(1, 0)\}$

Se voglio segno - basta imporre $x - 3y = 0 \leadsto \text{Span}\{(3, 1)\}$

③ Capire in $\mathbb{R}^2$ il segno della forma quadratica, cioè disegnare l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : q(x,y) > 0\}$$

$$\begin{aligned} q(x,y) > 0 &\Leftrightarrow (x - 3y)^2 - 5y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3y)^2 - (\sqrt{5}y)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3y + \sqrt{5}y)(x - 3y - \sqrt{5}y) > 0 \end{aligned}$$

Quindi i 2 fattori devono essere ++ oppure --

Considero le rette

$$x - 3y + \sqrt{5}y = 0$$

$$x - 3y - \sqrt{5}y = 0$$

Dalla figura è chiaro che

→ esiste una base di $\mathbb{R}^2$ fatta

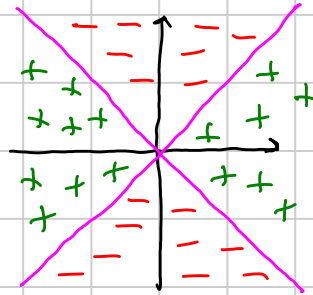
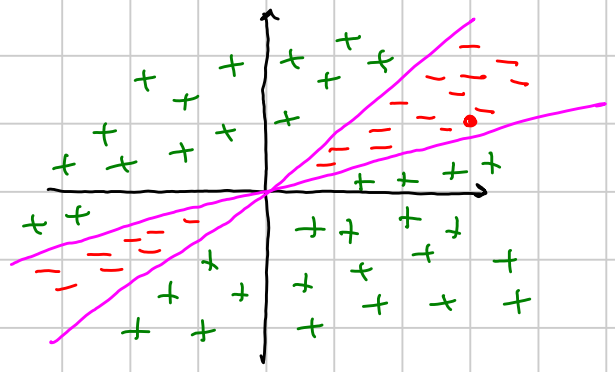
da vettori verdi ($q > 0$)

→ esiste una base di $\mathbb{R}^2$ fatta

da vettori rossi ($q < 0$)

→ esiste una base di $\mathbb{R}^2$ fatta

da vettori con $q = 0$



Modello: caso $q(x,y) = x^2 - y^2$

Esempio 2 Consideriamo $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2a yz$
dove a è un parametro.

Studiamo la segnatura al variare di a

Matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. lo studio con Sylvester 1-2-3

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1, \text{Det}_{2 \times 2} = 2, \text{Det}_{3 \times 3} = -a^2$$

Se $a \neq 0$, allora i segni sono $\underbrace{+}_{+} \underbrace{+}_{+} \underbrace{-}_{-}$, quindi $(2, 1, 0)$

Se $a = 0$, allora la forma diventa $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2$, quindi è già somma di quadrati, quindi segnatura è $(2, 0, 1)$.

Domanda: nel caso $a = 1$, trovare

- un sottospazio di dim. 2 su cui $\tilde{v} > 0$
- un sottospazio di dim. 1 su cui $\tilde{v} < 0$

Per $a = 1$ la forma diventa $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2yz$

Provo a completare i quadrati:

$$\begin{aligned}
 q(x, y, z) &= x^2 + 2(y^2 + yz) \\
 &= x^2 + 2\left(y^2 + yz + \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right) \\
 &= x^2 + 2\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{2} \quad \leadsto \text{conferma } (2, 1, 0)
 \end{aligned}$$

Volendo un s.sp. di dim. 1 su cui è < 0 impongo l'annullamento dei primi due, quindi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \leadsto \text{Span}(0, 1, -2)$$

Volendo un s.sp. di dim. 2 su cui è > 0 , impongo l'annullamento dell'ultimo, quindi $z = 0 \leadsto \text{Span}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$

Teorema 1 La segnatura è il numero di autovalori positivi, negativi, nulli.

Dim. **1° fatto** Se ho k autovalori positivi, allora ho un s.sp. di dim. k su cui la forma è definita positiva. Basta prendere il sottospazio generato dai relativi autovettori.

Per il teo spettrale esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

corrispondono agli autovalori positivi

Se li metto come colonne di una matrice M , la matrice A si diagonalizza

$$M^{-1}AM = D$$

oppure

$$A = MD\overset{\uparrow}{M^{-1}} = MD\overset{\uparrow}{M^t}$$

perché $M^{-1} = M^t$

Prendo un qualunque vettore $v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$.

Cosa succede se faccio $v^t A v$.

Intanto

$$\begin{aligned} A v &= c_1 A v_1 + \dots + c_k A v_k \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k \end{aligned}$$

e quando faccio

$$v^t A v \text{ è come fare } \langle v, A v \rangle =$$

$$= \langle c_1 v_1 + \dots + c_k v_k, c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda_k v_k \rangle = \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_k c_k^2$$

e questo è > 0 perchè $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono > 0 .

2° fatto Se ho k autovalori $>$, e R autovalori $= 0$, allora ho un s.sp. di dim. k su cui la forma è > 0 .
Stessa dim. di sopra

3° fatto Se ho solo k autovalori $>$, allora non posso avere un s.sp. di dim. $\geq k+1$ su cui è > 0 .

Ho k autovalori $>$ e $(n-k)$ autovalori negativi o nulli.

Per il fatto 2 ho un sottospazio W_- di dimensione $n-k$ su cui q è ≤ 0 .

Se V è un s.sp. qualunque di dim. $\geq k+1$, questo per forza interseca W_- , cioè contiene vettori su cui $q \leq 0$.

$$\begin{array}{c} \dim(V \cap W) + \underbrace{\dim(V+W)}_{\leq n} = \underbrace{\dim(V)}_{\geq k+1} + \underbrace{\dim(W)}_{n-k} \\ \downarrow \\ \text{non può essere } 0 \text{ perchè altrimenti a sx ho } \leq n, \text{ a dx } \geq n+1 \\ \text{---} 0 \text{ ---} 0 \text{ ---} \end{array}$$

Esempio $n=10$ e segnatura $(\underset{6}{5}, \underset{3}{3}, \underset{1}{2}) \leftarrow$ segue autovalori

So che

- esiste s.sp. di dim $\overset{6}{5}$ su cui $q > 0$ ($n_+ = \overset{6}{5}$)
- esiste un s.sp. di dim $\underset{4}{5} = 3+2$ su cui $q \leq 0 \rightsquigarrow W$

Se avessi un V di dim ⁷ 6 su cui $q > 0$, questo dovrebbe per
forza intersecare W , quindi in V ci sarebbero vettori $v \neq 0$
tali $q(v) \leq 0$.

— 0 — 0 —