

METODI PER TROVARE LA SEGNAZIONE

- ① Segno autovalori
- ② Completamento dei quadrati
- ③ Minori orlati di SYLVESTER
- ④ Metodo di CARTESIO

- ① Segno autovalori: calcolo gli autovalori di A e ne guardo il segno.

Svantaggio: bisogna trovare le radici di un polinomio, e in dim alta può essere un problema

- ② Completamento dei quadrati. Ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni lin. indep. Allora

- il numero di termini con il segno + è n_+
- " " " " " " " - è n_-

Esempio 1 $q(x, y) = x^2 + 4xy - 3y^2$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y^2 - 3y^2$$

$$= (x+2y)^2 - 7y^2$$

Un termine con il segno + e un termine con il segno -, quindi $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$

Il fatto che siano espressioni lin. indep. mi impedisce di pensare la scrittura come

$$q(x, y) = (x+2y)^2 - \underline{3y^2 - 4y^2}$$

non sono indipendenti, quindi

non vale

Esempio 2 $q(x, y) = x^2 + 3xy + 8y^2$

$$= x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 8y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{23}{4}y^2$$

Due termini con il segno + $\Rightarrow$ segnatura $(2, 0, 0)$

Esempio 3 $q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

$$= 2 \left[x^2 + 3xy + 2y^2 \right]$$

$$= 2 \left[x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 \right]$$

$$= 2 \left[\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \right] = 2 \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Segnatura: $(1, 1, 0)$. Come trovo un vettore (x, y) tale che $q(x, y) < 0$?

Solgo $y = 1$ e x in maniera tale che $x + \frac{3}{2}y = 0$, cioè $x = -\frac{3}{2}$,

quindi $(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ oppure $(x, y) = (-3, 2)$

Verifica: $q(-3, 2) = 18 - 36 + 16 = -2$.

Alternativa con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 8 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow \text{autovalori } + \text{ e } -.$$

Esempio 4 $q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 3y^2 + 4xz + 6z^2$

$$= x^2 + 2xy + 4xz - 3y^2 + 6z^2$$

$$= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 3y^2 + 6z^2$$

$$= (x + y + 2z)^2 - 4y^2 + 2z^2 - 4yz$$

$$= (x + y + 2z)^2 - (2y + z)^2 - z^2 + 2z^2$$

In conclusione $q(x,y,z) = (x+y+2z)^2 - (2y+z)^2 + z^2$

$\Rightarrow$ Segnatura = $(2, 1, 0)$

Esempio 5 $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \rightsquigarrow (1, 0, 1)$

Esempio 6 $q(x,y) = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \rightsquigarrow (1, 1, 0)$

Oss. Quando "non ci sono quadrati", questo è il modo di farli saltare fuori

— 0 — 0 —

③ **SYLVESTER** Si lavora sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -3 - 6 - 6 - 27 + 4 - 1 = -39$$

Scrivo di fila i segni dei determinanti e metto in testa un segno + d'ufficio

+ — + — —
P V P

P = permanenza di segno

V = variazione di segno

Allora, se non lo incontrato strada facendo $\text{Det} = 0$

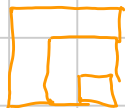
- m_+ = numero di permanenze
- m_- = numero di variazioni
- $m_0 = 0$

Svantaggio: possibilità di trovare zero strada facendo.

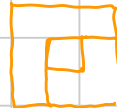
Varianti: quello descritto è Sylvester 1-2-3, ma funziona uguale permutando i 3 numeri.



Sylvester 3-2-1



Sylvester 2-3-1



Esempio $q(x, y, z) = 3y^2 + 6xy - 4yz + 2xz$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Sylvester 2-1-3:

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 3$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = -9$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -6 - 6 - 3 = -15$$

Segui:

ufficio



Segnatura: (2, 1, 0)

Svantaggio: gli zeri sono un problema
— 0 — 0 —

④ CARTESIO

Teorema misterioso (di analisi) Sia $p(x)$ un polinomio di grado n con tutte le radici reali. Sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \underline{a_k x^k}$$

ultimo termine con coeff. $\neq 0$

Allora

- il numero di radici nulle è uguale a k
- il numero di radici positive è uguale al numero di VARIAZIONI di segno nella successione dei coeff. non nulli
- il numero di radici negative si ottiene per differenza tra il grado e la somma dei primi 2,

Esempio $p(x) = x^5 - x^3$

$m_0 = 3$ (x^3 è il termine di grado + basso)

Successione dei coeff. è $+ \quad -$ $\downarrow$ $1V$ $\leadsto n_+ = 1$

Per differenza ottengo (1, 1, 3)

Operativamente:

- calcolo il polinomio caratteristico
- stabilisco il segno degli autovalori senza risolvere con Cotesio.

Conclusione:

- Cotesio funziona sempre
- Sylvester può essere più breve quando funziona
- Completamento quadratico dà più informazioni.

— o — o —