

FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di secondo grado nelle n variabili

Esempio $m=2$ $q(x,y) = 3x^2 + 7y^2 + 5xy$
2 variabili

Più in generale sono tutti gli oggetti del tipo

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

$n=3$ La forma generale sarà

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + f xz$$

Esercizio Da quanti parametri dipende una forma in dimensione n ?

$$\begin{array}{c} n \\ \uparrow \\ \text{termini} \\ \text{puri} \end{array} + \begin{array}{c} \binom{n}{2} \\ \uparrow \\ \text{termini} \\ \text{misti} \end{array} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA FORMA QUADRATICA

Ad ogni forma quadratica si associa una matrice A simmetrica tale che

$$q(v) = v^t A v$$

$\uparrow$
vettore con
n componenti
 $\uparrow$
matrice n x n
simmetrica

Come è fatta la matrice?

→ Sulla diagonale al posto $a_{i,i}$ c'è il coeff. di x_i^2

→ Fuori dalla diagonale al posto $a_{i,j}$ (con $i \neq j$) c'è METÀ del coeff. di $x_i x_j$.

Esempi $q(x,y) = 3x^2 + 5y^2 + 4xy$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Verifica $(x \ y) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+5y \end{pmatrix} = 3x^2 + \boxed{2xy + 2yx} + 5y^2$$

$\quad \quad \quad 4xy$

$$q(x,y,z) = x^2 - 6z^2 + 3xy + 5yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$\quad \quad \quad x \quad y \quad z$

— 0 — 0 —

Domanda: quando sostituisco dei numeri alle variabili, ottengo quantità positive o negative?

Def. Sia $q(v)$ una forma quadratica. Si dice che $q(v)$ è

- definita positiva se $q(v) > 0$ per ogni $v \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(v) \geq 0$ per ogni v
- definita negativa se $q(v) < 0$ per ogni $v \neq 0$
- semidefinita negativa se $q(v) \leq 0$ per ogni v
- non definita o indefinita se esiste v_1 b.c. $q(v_1) > 0$ ed esiste v_2 b.c. $q(v_2) < 0$.

Oss. Per dimostrare che una forma è indefinita basta trovare due vettori v_1 e v_2 tali che $q(v_1)$ e $q(v_2)$ hanno segno diverso.

— 0 — 0 —

Def. Ad ogni forma quadratica (o analogamente ad ogni matrice simmetrica) è associata una terna di numeri interi (n_+, n_-, n_0) , tutti ≥ 0 , tali che

$$n_+ + n_- + n_0 = n \quad (\text{numero delle variabili})$$

così definiti

- n_+ è la massima dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ su cui la forma è definita positiva
- n_- è la massima ..., definita negativa
- n_0 è definito per differenza (in modo che la somma faccia n).

Questa terna di numeri si dice SEGNATURA della forma

— 0 — 0 —

Fatto Una forma quadratica (o una matrice simmetrica) è

- definita positiva se $n_+ = n$ e $n_- = n_0 = 0$
- semidef. positiva se $n_- = 0$
- definita negativa se $n_- = n$ e $n_+ = n_0 = 0$
- semidef. negativa se $n_+ = 0$
- indefinita se $n_+ > 0$ e $n_- > 0$ (n_0 può fare quello che gli pare)

Oss. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

$$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$$

Quindi, se $q(v) > 0$, allora $q(w) > 0$ per ogni $w \in \text{Span}(v)$
retta per l'orig. generata v

Quindi, se $q(v) > 0$, allora $n_+ \geq 1$ perché
c'è un sottospazio di dim. ≥ 1 su cui la forma è def. pos.

— 0 — 0 —

Teorema (per ora misterioso) Sia $q(v)$ una forma quadratica e sia A la matrice simmetrica ad essa associata.

Sappiamo dalla teoria delle forme canoniche che A ha n autovalori reali.

Allora

- n_+ è il numero di autovalori > 0 ,
- n_- è il numero di autovalori < 0 ,
- n_0 è il numero di autovalori nulli.

Esempio 1 $q(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$

Si vede ad occhio che

$$q(1, 0) = 1 > 0 \Rightarrow n_+ \geq 1$$

$$q(0, 1) = -2 < 0 \Rightarrow n_- \geq 1$$

Poiché $n_+ + n_- + n_0 = 2$, sappiamo che per forza $n_+ = n_- = 1$ e $n_0 = 0$

Riprova con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Ci aspettiamo un autovalore > 0 e uno < 0 .

Volendo si calcolano con il polinomio caratteristico, ma in realtà basta guardare il det.

$\text{Det } A = -2 - \frac{9}{4} < 0$, quindi ho 2 autovalori di segno diverso.
simmetrica

Oss. Per una matrice 2×2 , se $\text{Det} > 0$, allora gli autovalori possono essere $+, +$ oppure $-, -$. Per decidere basta guardare il segno della traccia, che è la somma degli autovalori.

Oss. Data una matrice A simmetrica, si ha

$$n_0 > 0 \Leftrightarrow \text{Det } A = 0$$

$$\text{In tal caso } n_0 = \dim(\text{Ker}) = n - \text{rang}(A)$$

$$\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$$