

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 41

Titolo nota

22/11/2014

Continuazione teorema spettrale.

3° fatto semplice (metà del 1° enunciato) Se esiste una base ortonormale di autovettori, allora f è simmetrica.

Dim. In tale base la matrice associata ad f è diagonale, dunque una matrice simmetrica.

Se la matrice rispetto ad una base ortonormale è simmetrica, allora f è simmetrica (già visto).

— o — o —

Lemma 1 Se f è simmetrica, allora esiste almeno un autovalore reale,

Dim. Di sicuro c'è almeno un autovalore complesso. Indichiamo con λ questo autovalore e con v un corrispondente autovettore, cioè $f(v) = \lambda v$ (anche v è complesso).

Facendo il coniugato ottengo

$$\overline{f(v)} = f(\bar{v}) = \bar{\lambda} \bar{v}$$

il che dice che anche $\bar{\lambda}$ è un autovalore con autovettore $\bar{v}$.

Allora

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, \bar{v} \rangle &= \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle f(v), \bar{v} \rangle = \langle v, f(\bar{v}) \rangle \\ &= \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

da cui $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle v, \bar{v} \rangle = 0$

Se $v = (x_1, \dots, x_n)$ allora $\langle v, \bar{v} \rangle = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$
 $= \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\text{valore assoluto dei numeri complessi } x_1, \dots, x_n} \neq 0$

Di conseguenza $\langle v, \bar{v} \rangle \neq 0$, quindi $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.
Quindi λ è reale.

— o — o —

Lemma 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale tale che

$$f(w) \in V \quad \forall w \in V.$$

(V è un sottospazio che va in sé)

Allora

$$f(w) \in V^\perp \quad \forall w \in V^\perp$$

(Allora anche $V^\perp$ va in sé).

Dim. Sia $w \in V^\perp$ e sia $v \in V$. Allora

$$\langle f(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle = 0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $V^\perp \quad V \text{ per ipotesi}$

Quindi

$$\langle f(w), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

il che dice che $f(w) \in V^\perp$.

— o — o —

Dim. teo. spettrale (Versione applicazione)

Si fa per induzione sulla dimensione n .

In dim = 1, non c'è nulla da dimostrare.

Come si passa dalla dim $n-1$ alla di n ?

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dal lemma 1 sappiamo che esiste almeno un autovalore reale λ_1 con autovettore v_1 , che posso sempre supporre di norma 1. Questo è il primo elemento della base.

Ora pongo $V = \text{Span}(v_1)$

Per il lemma 2 so che $V^\perp$ viene mandato in sé, quindi posso pensare f come applicazione

$$f: V^\perp \rightarrow \underbrace{V^\perp}_{\text{dim } n-1}$$

Inoltre f è simmetrica su $V^\perp$ perché lo era in partenza.

Per ipotesi induttiva esiste una base di $V^\perp$ fatta da $n-1$ vettori ortonormali che sono anche autovettori.

Quindi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sono la base richiesta,
 base di $V^\perp$ data
 dall'ipotesi induttiva

— 0 — 0 —

Oss. Sia f qualunque (lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Sia v_1 un autovettore con autovalore λ_1 .

Completo v_1 ad una base aggiungendo $v_2, \dots, v_n$.

Rispetto a questa base la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & * & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Sia f simmetrica, v_1 e λ_1 come sopra. Completo v_1 ad una base ortonormale (basta ortogonale). Allora la matrice diventa

$$\begin{matrix} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ \vdots \\ v_n \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f(v_2), \dots, f(v_n) \text{ stanno in } V^\perp, \text{ cioè} \\ \text{ nello spazio generato da } v_2, \dots, v_n \end{matrix}$$

$V = \text{Span}(v_1)$
 $V^\perp = \text{Span}(v_2, \dots, v_n)$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad \dots \quad f(v_n)$

— 0 — 0 —

Punto della situazione

① Una matrice A si diagonalizza (sui reali) mediante una matrice ortogonale $\Leftrightarrow A$ è simmetrica
 $\uparrow$ diagonalizzazione DI LUSO

② Una matrice A si diagonalizza (sui reali) senza nessuna richiesta su M (sdo invertibile) $\Leftrightarrow$ gli autovalori sono reali e hanno mult. alg. = mult. arit.

③ Una matrice A si diagonalizza (sui complessi) senza nessuna richiesta su M (sdo invertibile) $\Leftrightarrow$ gli autovalori (complessi) hanno molt. alg. = molt. arit.

④ Una matrice A , anche quando non si diagonalizza, si jordanizza (sui reali o sui complessi).

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ha forma canonica} \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fatto 1 : $\text{rang}(A) = 1$, quindi $\dim(\ker(A)) = 2$

Fatto 2 (fatto generale) $\ker A \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda = 0$ è autovalore
 $v \in \ker A \quad v \neq 0 \Leftrightarrow Av = 0 \cdot v$

Fatto 3 (fatto generale) $\ker A = \text{autospatio dell'autovalore } 0$
 $\ker A = \{v \in V : Av = 0 = 0 \cdot v\}$

Fatto 4 Nell'esempio $\lambda = 0$ è autovalore che ha molt. geom. = 2.
Essendo $\text{Tr}(A) = 6$, allora il terzo autovalore è $\lambda = 6$.

Quindi gli autovalori sono

- $\lambda = 0$ con $m_a(0) = m_g(0) = 2$
- $\lambda = 6$ con $m_a(6) = m_g(6) = 1$

Quindi A è diagonalizzabile e la forma canonica è quella scritta, (oss. $p_A(\lambda) = \lambda^2(6-\lambda)$)

Chi è una M che diagonalizza? le sue colonne sono una base di autovettori : v_1, v_2, v_3 tali che

$$Av_1 = 6v_1 \quad \text{ad esempio} \quad v_1 = (1, 1, 1)$$

$$Av_2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} Av_2 = 0 \\ Av_3 = 0 \end{array} \right\} \text{Base del ker} \quad v_2 = (1, -1, 0)$$

$$Av_3 = 0 \quad v_3 = (1, 0, -1)$$

Quindi una M che diagonalizza è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: verificare che $M^{-1}AM = D$

$$\leadsto \text{Det: } 1+1+1 = 3 \neq 0$$

Essendo A simmetrica, si deve per forza diagonalizzare anche con una M ortogonale. Come la trovo?

$$v_1 = (1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, -1, 0) \text{ come prima (è ortogonale al precedente)}$$

$v_3 \leadsto$ modifico con G.S., in maniera da diventare ortogonale a v_2 (e restare ortogonale con v_1)

Concludo ortonormalizzando e usando come colonne per M .

Ho una nuova M ortogonale che diagonalizza.

— 0 — 0 —