

TEOREMA SPETTRALE

Def. Un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice simmetrica se

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

f "migra nei prodotti scalari"

Def. Una matrice A si dice simmetrica se $A = A^t$.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Oss. In una matrice simmetrica posso mettere quello che voglio sulla diagonale e sopra la diagonale. A quel p.to sotto devo copiare

Quindi: una matrice $n \times n$ simmetrica dipende da $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri

Dim. 1° modo: posso fissare liberamente

$$\begin{array}{ccccccc} n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 & = & \frac{n(n+1)}{2} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \text{1ª riga} & & \text{2ª riga} & & \text{ultima riga} & & & & & & \end{array}$$

2° modo: posso fissare liberamente la diagonale $\leadsto n$ parametri
metà dei rimanenti elementi $\leadsto \frac{n^2-n}{2}$

$$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

— 0 — 0 —

Proposizione L'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale (ovvio, anzi è un sottospazio di $M_{n \times n}$) di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$

Oss. In termini di elementi: $A = A^t$ se e solo se $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni i e j tra 1 ed n .

Proposizione Una applicazione lineare è simmetrica se e solo se la matrice ad essa associata (rispetto ad una qualunque base ortonormale) è una matrice simmetrica.

Dim. Sono 2 implicazioni.

1ª implicazione: se f è simmetrica e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, allora la matrice A è simmetrica.

Fatto fondamentale: $a_{i,j} = \langle f(v_j), v_i \rangle$

$A = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix}$

Annotations:
 - Columns: $f(v_1), f(v_j), f(v_n)$
 - Rows: $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$
 - $a_{i,j}$ is the element in the j -th column and i -th row.

colonna j -esima
selezionare la componente i

Se f è simmetrica, cioè unigra nei prodotti scalari, allora

$$a_{i,j} = \langle f(v_j), v_i \rangle = \langle v_j, f(v_i) \rangle = a_{j,i}$$

e quindi la matrice è simmetrica.

Il fatto che la base sia ortonormale serve per dire che

$$\langle f(v_j), v_i \rangle = i\text{-esimo elemento della } j\text{-esima colonna}$$

2ª implicazione Se A è simmetrica e rappresenta f rispetto ad una base ortonormale, allora f è simmetrica.

Parenthesi : fare il prodotto scalare tra u e v è equivalente a fare $x^t \cdot y$

dove x e y sono i vettori colonna delle componenti di u e v .

$$u = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \quad v = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_y$$

$$x^t \cdot y = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Se la matrice A è simmetrica

$$\langle f(u), v \rangle = (Ax)^t \cdot y = x^t A^t y = x^t A y = \langle u, f(v) \rangle$$

$\uparrow$
 A è simm.

x componenti di u , Ax componenti di $f(u)$
 y componenti di v , Ay componenti di $f(v)$.
— o — o —

Teorema spettrale (Versione con le applicazioni)

Un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è simmetrica se e solo se esiste una base ortonormale di autovettori.

Teorema spettrale (Versione con le matrici)

Una matrice A è simmetrica se e solo se è diagonalizzabile mediante una matrice M ortogonale, cioè se e solo se esiste M tale che

TUTTO
IN $\mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} M^{-1} A M = D \leftarrow \text{diagonale} \\ M^{-1} = M^t \leftarrow M \text{ è ortogonale, cioè le sue} \right. \\ \left. \text{colonne (e anche le sue righe)} \right. \\ \left. \text{sono ortonormali.} \right]$$

Conseguenza Gli autovalori di una matrice simmetrica sono

- tutti reali
- tutti con molteplicità algebrica = molteplicità geometrica,

1° Fatto semplice Se A si diagonalizza mediante matrice M ortogonale, allora A è simmetrica (metà del 2° enunciato).

Dim. Per ipotesi sappiamo che $M^{-1} A M = D$ e $M^{-1} = M^t$.
Ricavo A :

$$A = M D M^{-1}$$

Ma allora

$$A^t = (M D M^{-1})^t = (M D M^t)^t = \overbrace{(M^t)^t}^{\substack{\uparrow \\ M^{-1} = M^t}} \overbrace{D^t}^{\substack{\uparrow \\ D}} \overbrace{M^t}^{\substack{\uparrow \\ M^{-1}}} \quad \text{prop. tras. prodotto}$$

$$= M D M^{-1} = A$$

2° fatto semplice Se f è un' applicazione simmetrica e u e v sono autovettori con autovalori distinti, allora $\langle u, v \rangle = 0$.

Dim. Supponiamo che $f(u) = \lambda u$
 $f(v) = \mu v$ con $\lambda \neq \mu$.

Allora:

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \lambda u, v \rangle = \langle f(u), v \rangle && \text{(uso che } f \text{ è simm.)} \\ &= \langle u, f(v) \rangle \\ &= \langle u, \mu v \rangle \\ &= \mu \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Confrontando il 1° e l'ultimo ottengo

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$