

Forme canoniche : $\rightarrow$ Diagonalizzazione
 $\rightarrow$ Forma di JORDAN

Problema : data $A \in M_{n \times n}$, vedere se A è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste M invertibile t.c.

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{diagonale}$$

Teorema $\uparrow$ È possibile diagonalizzare A se e solo se tutti gli autovalori di A sono reali e hanno molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica.
 (Diagonalizzazione se e solo se)

Corollario (Condizione sufficiente alla diagonalizzazione)
 Se tutti gli autovalori sono reali e distinti, allora è diagonalizzabile,

Dim. Per un lemma precedente sappiamo che
 $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ (m_g = molt. geom., m_a = ... algebr.)
 per ogni autovalore λ . Se tutte le $m_a(\lambda) = 1$, allora anche
 $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$ per ogni autovalore. Quindi per il teorema
 A è diagonalizzabile.

— o — o —

Esempio banale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A \text{ è diagonalizzabile}$$

Essendo triang. superiore, gli autovalori sono 1, 3, 7 e sono distinti. Per esercizio trovare la M che diagonalizza, che ha come colonne gli autovettori.

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = A$

A è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

Gli autovalori sono numeri complessi non reali, quindi

→ non è diagonalizzabile sui reali

→ è diagonalizzabile sui complessi, cioè esiste una matrice M di numeri complessi tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

Le colonne di M sono gli autovettori complessi di A, che trovo risolvendo

$$A v = (2+3i) v$$

$$A v = (2-3i) v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+3i)x \\ (2+3i)y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x-2y = (2+3i)x \\ 5x+3y = (2+3i)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(-1-3i) - 2y = 0 \\ 5x + (1-3i)y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Oss. } \begin{pmatrix} -1-3i & -2 \\ 5 & 1-3i \end{pmatrix} \text{ ha Det} = 0$$

Basta prendere $x = -2, y = (1+3i)$ e ho una soluzione

Adesso dovrei risolvere il sistema con $2-3i$. Si può o fare il conto, o vedere che è il coniugato: $x = -2, y = 1-3i$

Morale!

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1+3i & 1-3i \end{pmatrix} \quad \text{Provare a sostituire,}$$

Oss. Se A è una matrice a coeff. reali, λ è un autovalore complesso e v è un autovettore corrispondente, allora anche $\bar{\lambda}$ è autovalore e $\bar{v}$ è un autovettore corrispondente

Dim. $Av = \lambda v$ Faccio il coniugato a dx e sx

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} \rightsquigarrow \overline{A \cdot v} = \bar{\lambda} \bar{v} \rightsquigarrow A \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

$\uparrow$
coniugato prodotto
= prodotto dei coniugati

$\uparrow$
 A è reale

— o — o —

Cosa succede quando non è diagonalizzabile? Forma di JORDAN

Def. Un blocco di JORDAN di dim k e autovalore λ è una matrice $k \times k$ che ha

- tutti λ sulla diagonale
- tutti 1 sopra la diagonale
- tutti 0 altrove

Esempi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ $\lambda = 7$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$

Def. Una matrice di JORDAN è una matrice che ha

- tutti blocchi di JORDAN sulla diagonale, con λ uguali o diversi,
- tutti 0 altrove

Oss. Una matrice diagonale è una matrice di JORDAN con tutti blocchi da 1×1 ,

Esempi

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema misterioso Ogni matrice a coeff. complessi è simile ad una matrice di Jordan. Inoltre

- i numeri che compaiono sulla diagonale sono gli autovalori con molteplicità (ogni autovalore compare una volta)
- il numero dei blocchi relativi ad un dato autovalore è la sua molteplicità geometrica. (quindi se $m_a = m_g$ ho tutti blocchi da 1×1)

— 0 — 0 —

Matrice di JORDAN REALE Ci sono 2 tipi di blocchi

- i blocchi classici (λ reale sulla diag., 1 sopra)
- i blocchi costituiti da "mattoni 2×2 "

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{matrix}} & \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Blocco da 3×3 mattoncini con mattoni sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Teorema misterioso Ogni matrice a coeff. reali è simile ad una matrice di Jordan reale. Inoltre

- i numeri che compaiono sulla diagonale dei blocchi classici sono gli eventuali autovalori reali
- i mattoncini $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dei blocchi nuovi corrispondono agli autovalori veramente complessi $a \pm ib$ (compaiono a coppie).

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ è simile a } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$