

Continuazione forme canonicheFatti importanti sui polinomi

Sia

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

un polinomio.

(1) Se $a_0, \dots, a_n$ sono numeri complessi, allora esistono esattamente n radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (eventualmente ripetute) e

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

(un pol. di grado n
ha al max n
radici complesse
distinte)

cioè si scrive come prodotto di fattori di 1° grado

(2) Il prodotto delle radici è $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

(3) La somma delle radici è $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

"Dim"

(1) Teorema fondamentale dell'algebra (la parte difficile è dimostrare che c'è almeno una radice).

Una volta che c'è una radice α , si divide per $x - \alpha$ e si procede per induzione.

(2) Supponiamo di aver diviso per a_n , in modo che il polinomio diventi MONICO, cioè x^n ha coeff. = 1. Allora

$$[n=2] \quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\text{somma}} x + \underbrace{\alpha_1 \cdot \alpha_2}_{\text{prodotto}}$$

$$[n=3] \quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}_{\text{somma}} x^2 + \dots x - \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\text{prodotto}}$$

e così via per induzione.

□

Esempi

$$x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\text{Somma} = 2 \quad \text{Prodotto} = 6$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\text{Somma} = \frac{2}{5} \quad \text{Prodotto} = \frac{6}{5}$$

$$5x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{Somma} = -\frac{3}{5} \quad \text{Prodotto} = -\frac{1}{5}$$

↑
cambio segno
sempre

↑
cambio segno
perché grado ≥ 3

Oss. Si tratta sempre di somma e prodotto di radici COMPLESSE
e le radici di molteplicità m contano m volte.

— o — o —

Proprietà del polinomio caratteristico Sia $A \in M_{n \times n}$ una matrice,
e sia

$$P_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda \text{Id})$$

il suo polinomio caratteristico.

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(2) Le radici del polinomio caratteristico sono gli autovalori di A .

(quindi una matrice ha al max n autovalori complessi, e ne ha esattamente n se contati con molteplicità. Due matrici simili hanno per forza gli stessi autovalori)

(3) grado $(P_A(\lambda)) = n$ e il coeff. di λ^n è $(-1)^n$

(4) Il termine noto del polinomio caratteristico è $\text{Det}(A)$

(conseguenza: $\text{Det } A = \text{prodotto degli autovalori di } A$)

(5) Il coeff. di λ^{n-1} è $(-1)^{n+1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$
somma degli elementi sulla
diagonale di A

(conseguenza: due matrici simili hanno la stessa somma degli
elementi sulla diagonale).

Def. Data una matrice quadrata $n \times n$ si definisce TRACCIA di A
la somma degli elementi sulla diagonale

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Fatti da ricordare

① Due matrici simili hanno:

→ stesso pd. caratteristico

→ stessi autovalori

→ stesso Det

→ stessa traccia

② $\text{Det } A = \text{prodotto degli autovalori}$

③ $\text{Tr}(A) = \text{somma autovalori}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} = 7 \quad \text{Det} = 10$$

$$\text{Autovalori: } 2, 5$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Dim. teo. pd. caratt.

(1) visto lezioni prec.

(2) " " "

$$(3) \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Il termine di grado max viene fuori quando prendo

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) \dots (a_{nn}-\lambda)$$

e a sua volta λ^n avrà coeff. $(-1)^n$

$$(4) \text{ termine noto} = P_A(0) = \text{Det}(A - 0 \cdot \text{Id}) = \text{Det } A$$

$$\left[\text{Conseguenza} \quad \text{prodotto autovalori} = (-1)^n \frac{\text{termine noto}}{\text{coeff di } \lambda^n} = \frac{(-1)^n \text{Det } A}{(-1)^n} \right]$$

↑
fatto gen.
sui polinomi

(5) Formalmente si dimostra per induzione. Un po' brutalmente...
da dove vengono fuori i termini con λ^{n-1}

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & & \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{2,2} - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n,n} - \lambda \end{matrix}} & \\ & & B \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{1,1} - \lambda) \cdot \text{Det } B + (\text{roba di grado } \leq n-2)$$

$$= (a_{1,1} - \lambda) \left((-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^{n-2} \text{tr } B \right)$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} a_{1,1} \lambda^{n-1} + (-1)^{n+1} \lambda^{n-1} \text{tr } B + \text{roba di grado } \leq n-2$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} \lambda^{n-1} (a_{1,1} + \text{Tr } B) + \text{roba di grado } \leq n-2.$$

[Conseguenza:]

$$\text{somma autovalori} = - \frac{\text{coeff. di } \lambda^{n-1}}{\text{coeff. di } \lambda^n} = - \frac{(-1)^{n+1} \text{Tr } A}{(-1)^n} = \text{Tr } A$$

— 0 — 0 —

Lemma Autovettori relativi ad autovalori diversi sono sempre
linearmemente indipendenti

Dim. Sia $v_1, \dots, v_m$ autovettori di A , e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dei
corrispondenti autovalori, cioè $Av_k = \lambda_k v_k$ per ogni $k=1, \dots, m$.
Supp. che $v_1, \dots, v_m$ non siano lin. indep., cioè esiste
una comb. lineare

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

con almeno un coeff. $\neq 0$. Tra tutte queste combinazioni
prendo quella con il minor numero di coeff. $\neq 0$. Sia

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

(ho cambiato i nomi in modo che ad essere coinvolti siano
i primi m)

Applico A:

$$A(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = 0$$

$$= c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m = 0$$

Ma allora

$$2^a - \lambda_1 \cdot 1^a = c_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + c_m(\lambda_m - \lambda_1) v_m = 0$$

ed è più corta delle precedenti.

Poiché i λ_i sono diversi i coeff. non sono tutti nulli,

— 0 — 0 —