

Problema delle forme canoniche (con la stessa base in partenza ed arrivo)

Data $A \in M_{n \times n}$, trovare $M \in M_{n \times n}$ invertibile t.c.

$$M^{-1} A M \leftarrow \text{matrice simile ad } A$$

sia particolarmente semplice.

Detto altrimenti: trovare una matrice simile ad A che sia semplice.

Def. Una matrice $A \in M_{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale.

Proprietà matrici simili

(1) Se A_1 è simile ad A_2 , allora $\det(A_1) = \det(A_2)$

(2) Se A_1 è simile ad A_2 , e B_1 è simile a B_2 (con la stessa M), allora

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + B_1 \text{ è simile a } A_2 + B_2 \\ A_1 \cdot B_1 \text{ è simile a } A_2 \cdot B_2 \end{array} \right\} \text{cometto dopo video}$$

(3) Se A_1 è simile ad A_2 , allora A_1^k è simile a A_2^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dim. (1) $A_2 = M^{-1} A_1 M$. Allora per Binet

$$\det A_2 = \det M^{-1} \cdot \det A_1 \cdot \cancel{\det M} = \det A_1$$

$\frac{1}{\cancel{\det M}}$

$$(2) \quad A_2 = M^{-1} A_1 M \quad B_2 = M^{-1} B_1 M$$

$$A_2 + B_2 = M^{-1} A_1 M + M^{-1} B_1 M = M^{-1} (A_1 + B_1) M$$

$$A_2 \cdot B_2 = M^{-1} A_1 \underbrace{M \cdot M^{-1}}_{\text{si semplificano}} B_1 M = M^{-1} (A_1 B_1) M$$

si semplificano
perché sono a
contatto

(3) Evoluzione a partire dal pto (2).

Def. Data $A \in M_{n \times n}$, si dice polinomio caratteristico di A il polinomio

$$P_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda \text{Id})$$

Fatto importante

(1) Se A è simile a B , allora $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

(2) Se A è diagonale, allora

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i numeri che compaiono sulla diag. di A

(3) Stessa cosa per le triangolari superiori

Dim. (1) Se $B = M^{-1} A M$, allora

$$P_B(\lambda) = \text{Det}(B - \lambda \text{Id}) = \text{Det}(M^{-1} A M - \lambda \overbrace{M^{-1} M}^{\text{Id}})$$

$$= \text{Det}[M^{-1}(A - \lambda \text{Id})M]$$

$$= \cancel{\text{Det } M^{-1}} \cdot \text{Det}(A - \lambda \text{Id}) \cdot \cancel{\text{Det } M} = \text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = P_A(\lambda)$$

(2) Se A è diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \lambda_2 - \lambda & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi } P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

(3) Se A è triangolare superiore, il discorso è analogo.

— 0 — 0 —

Conseguenza dei fatti (1) e (2): se A è diagonalizzabile, allora il suo pol. caratteristico $p_A(\lambda)$ è lo stesso della matrice diagonale finale, quindi si può scrivere come prodotto di fattori di 1° grado, a coeff. reali. In particolare, $p_A(\lambda)$ ha n radici reali, eventualmente contate con molteplicità.

Quindi: se $p_A(\lambda)$ ha almeno una radice che non sta in $\mathbb{R}$, allora addio diagonalizzabilità.

Def. Sia $p(x)$ un polinomio

- Si dice che α è una radice di $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$.

Questo implica che $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$

- Si dice molteplicità della radice α il più grande intero m tale che $(x - \alpha)^m$ divide $p(x)$

Fatto generale (misterioso) Ogni polinomio $p(x)$ a coeff. reali o complessi ha esattamente n radici complesse se contate con molteplicità, cioè si può scrivere nella forma

$$p(x) = c(x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici reali o complesse di $p(x)$.

Se un fattore è ripetuto k volte, allora la radice ha molteplicità k .

Def. Sia $A \in M_{n \times n}$ e sia λ un suo autovalore, che è una radice di $p_A(\lambda)$.

Si definisce

- MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ la sua molteplicità come radice di $p_A(\lambda)$
- MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ la dimensione dell'autospazio cioè $\dim(\ker(A - \lambda Id))$

Data una matrice A , come trovo gli autovalori? Come trovo le molteplicità algebrica e geometrica?

Matrice $A \rightsquigarrow p_A(\lambda) \rightsquigarrow$ trovo le radici e ho gli autovalori
 $\rightsquigarrow$ scomponendo $p_A(\lambda)$ ho le molt. algebriche
 $\rightsquigarrow$ guardando $A - \lambda Id$ ho le molt. geometriche.

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalori: } 1, 7, 9$$
$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(7-\lambda)(9-\lambda)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
fattori singoli $\Rightarrow$ molt. alg. = 1

Per le molt. geometriche calcolo $A - \lambda Id$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{Rango} = 2 \Rightarrow \dim \ker = 3 - 2 = 1$$

$$A - 7Id = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Rango} = 2 \Rightarrow \dim \ker = 3 - 2 = 1$$

$$A - 9Id = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad p_A(\lambda) = (1-\lambda)(7-\lambda)^2$$

autovalori: $\lambda = 1$ e $\lambda = 7$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
molt. alg. = 1 molt. alg. = 2

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{Rango} = 2 \rightsquigarrow \text{molt. geom.} = 1$$

$$A - 7Id = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rango} = 2 \rightsquigarrow \text{molt. geom.} = 1$$

Teorema Per ogni autovettore si ha che

$$1 \leq \text{mult. geom.} \leq \text{mult. alg.}$$

Conseguenza: se $\text{mult. alg.} = 1$, allora $\text{mult. geom.} = 1$.

Dim. Sia g la molteplicità geometrica. Vuol dire che l'autospazio ha dimensione g , cioè esistono $v_1, \dots, v_g$ lin. indep. tali che

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, f(v_g) = \lambda_1 v_g \quad (\text{stesso } \lambda).$$

Completo questi ad una base di V aggiungendo $v_{g+1}, \dots, v_n$.
In questa nuova base la matrice A diventa

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \lambda_1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad B - \lambda_1 \text{Id} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & & \\ & \lambda_1 - \lambda & & & \\ & 0 & & & \\ & & \lambda_1 - \lambda & & \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_g)$

il resto non so nulla

$$\text{Ora } p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \text{Det}(B - \lambda \text{Id}) = (\lambda_1 - \lambda)^g \cdot \text{Det}(C - \lambda \text{Id})$$

Questo fatto dice che la radice $\lambda = \lambda_1$ ha molteplicità almeno g , quindi $\text{mult. alg.} \geq \text{mult. geom.}$

— o — o —