

Forme canoniche nel caso di $f: V \rightarrow V$

Domanda: come posso scegliere una base $v_1, \dots, v_n$ di V in modo che la matrice di f , usando quella base sia in partenza sia in arrivo, sia particolarmente semplice.

In termini di matrici, sia $A \in M_{n \times n}$ che rappresenta f in una data base di V . Cerco $M \in M_{n \times n}$ invertibile tale che

$$M^{-1} A M$$

stesso cambio di base in partenza ed arrivo.

sia particolarmente semplice

Def. Due matrici A e B si dicono simili (matrici $n \times n$) se esiste $M \in M_{n \times n}$ invertibile t.c.

$$B = M^{-1} A M$$

Moralmente, due matrici simili rappresentano la stessa applicazione, solo in basi diverse.

Esempio motivazionale $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{2014} .

Attualmente l'unico modo di farlo è di calcolare tutte le potenze intermedie...

Altro problema: trovare una matrice B tale che $B^2 = A$.

Oss. Se A fosse diagonale sarebbe tutto semplice

Obiettivo: cercare se possibile di rendere A diagonale.

Cosa vuol dire se una certa applicazione è rappresentata da una matrice diagonale in una certa base $v_1, \dots, v_n$?

$$\begin{aligned} v_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ v_2 &\rightarrow \\ v_3 &\rightarrow \end{aligned}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

$$\left. \begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ f(v_3) &= \lambda_3 v_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} v_1, v_2, v_3 \text{ vanno} \\ \text{in multipli di} \\ \text{se stessi} \end{array}$$

Def. Sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare.

① Si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se esiste $v \neq 0$ tale che

$$f(v) = \lambda v \quad (v \text{ va in } \lambda \text{ volte se stesso})$$

② Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f si dicono autovettori corrispondenti tutti i vettori $v \neq 0$, $v \in V$, per cui vale la relazione di sopra

③ Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore, si dice autospatio di λ l'insieme degli autovettori corrispondenti e dello 0.

Oss. La restrizione $v \neq 0$ è essenziale, altrimenti se potessi usare $v = 0$ qualunque λ sarebbe autovalore.

Oss. L'autospatio relativo ad un certo λ è un sottospatto vettoriale.

Dilu Somma Se v_1 e v_2 stanno nell'autospatto, cioè

$$f(v_1) = \lambda v_1 \quad f(v_2) = \lambda v_2$$

allora

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \\ &= \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \end{aligned}$$

Prodotto Se v sta nell'autospatto, cioè $f(v) = \lambda v$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v). \quad \square$$

Domanda: come trovo gli autovalori e gli autovettori?

Risposta: sia A la matrice che rappresenta f .

Allora

$$\lambda \text{ è autovalore} \Leftrightarrow \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

$\uparrow$
matrice identica

Dim. λ è autovalore $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$ b.c. $Av = \lambda v$

$$\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \text{ b.c. } Av - \lambda v = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \text{ b.c. } (A - \lambda \text{Id})v = 0$$
$$\Leftrightarrow v \neq 0 \text{ e } v \in \ker(A - \lambda \text{Id})$$
$$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \text{ (contiene } v \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda \text{Id}) = 0.$$

$\uparrow$
con metodo dopo video

A questo punto l'autospazio relativo a λ è il $\ker$ di $A - \lambda \text{Id}$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vediamo se esistono autovalori/vettori

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda \text{Id}) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Quindi $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$ oppure $\boxed{\lambda = 3}$

$\uparrow$
autovalori

Calcolo gli autospazi. $\boxed{\lambda = 2}$ Cerco i vettori che vanno in 2 volte se stessi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y = 0 \\ \boxed{2x + 2y = 0} \end{cases}$$

$\uparrow$
è uguale alla prima: DEVE succedere

L'autospazio è $\text{Span} \{ \underline{(1, -1)} \}$

$\uparrow$
possibile autovettore

$$\boxed{\lambda=3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x-y = 3x \\ 2x+4y = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \leftarrow \text{Deve succedere}$$

$$\text{Autospazio} = \text{Span} \{ (1, -2) \}$$

Riassumendo: ci sono 2 autovalori

$$\lambda=2 \quad \text{con autovettore con.} \quad (1, -1) = v_1$$

$$\lambda=3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (1, -2) = v_2$$

Altro modo di calcolare gli autospazi è fare il ker di $A - \lambda I$

$$\boxed{\lambda=2} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda=3} \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

È equivalente a saltare un passaggio nel sistema.

Fatto importante: nella base $\{v_1, v_2\}$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Detto altrimenti, posto

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2$

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha che $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Verifica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Gran finale

$$M^{-1} A M = D$$

oppure

$$A = M D M^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = (M D M^{-1}) (M D M^{-1}) = M D^2 M^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = M D^2 \underbrace{M^{-1} M}_1 D M^{-1} = M D^3 M^{-1}$$

A questo punto per induzione $A^k = M D^k M^{-1}$

e in particolare $A^{2014} = M D^{2014} M^{-1}$

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 \\ 0 & 3^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto il gioco è fatto.

Se voglio una matrice B t.c. $B^{22} = A$, basta prendere

$$B = M \begin{pmatrix} \sqrt[22]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[22]{3} \end{pmatrix} M^{-1}$$

La verifica è la stessa di sopra.

— 0 — 0 —