

FORME CANONICHE

Idea base: data un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ e date basi in partenza ed arrivo, è possibile associare ad f una matrice A .
Domande:

- ① Se cambio le basi in partenza ed arrivo, come cambia la matrice?
- ② Se scelgo bene le basi in partenza ed arrivo, posso fare in modo che la matrice A sia particolarmente semplice (ad esempio con tanti zeri)?

Risposta alla ①. Sia A la matrice associata ad f con in partenza la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed in arrivo la base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W ($A \in M_{m \times n}$).

Sia $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una nuova base di V e sia $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ una nuova base di W . Allora tra queste due nuove basi la matrice di f è

$$B = \underbrace{M^{-1}}_{\text{vecchia} \rightarrow \text{nuova in } W} A \underbrace{N}_{\text{nuova} \rightarrow \text{vecchia in } V}$$

dove

- N è la matrice che ha come colonne le componenti di $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ (nuova $\rightarrow$ vecchia)
- M è la matrice che ha come colonne le componenti di $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ rispetto alla base $\{w_1, \dots, w_m\}$ (nuova $\rightarrow$ vecchia)

Teorema (risposta alla ②) Data $f: V \rightarrow W$, esistono una base di V ed una base di W rispetto alle quali la matrice associata ad f ha la seguente forma

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{r} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \downarrow r \end{matrix} & \begin{matrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ m = \dim W \\ \downarrow \end{matrix}$$

$\xleftrightarrow{n} \quad n = \dim V$

$$r = \text{ranko} = \dim(\text{Im})$$

Oss. Dato in termini di matrici, il te. precedente ci dice che per ogni $A \in M_{m \times n}$ di rango r esistono una matrice $N \in M_{m \times n}$ ed $M \in M_{m \times m}$ invertibili tali che

$$M^{-1} A N$$

ha la forma semplice scritta sopra.

Dim. $\dim V = n$, $\dim(\text{Im}) = r$, quindi $\dim(\ker) = n - r$.
 Scelgo una base $\underline{v_{r+1}, \dots, v_n}$ di $\ker(f)$
 $n - r$ vettori

La completo ad una base di V aggiungendo r vettori $v_1, \dots, v_r$.
 Pongo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$. Per fatti precedenti questi vettori sono lin. indep. e sono r . Quindi li posso completare ad una base di W aggiungendo $w_{r+1}, \dots, w_m$.

Alla fine di questa costruzione ho una base

$v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ di V

e una base

$w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ di W .

In questa base la matrice di f è

$$\begin{array}{l} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $f(v_1) f(v_2) \dots f(v_{r+1}) \dots f(v_n)$

cioè è la matrice che cercavo.

— 0 — 0 —

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Poiché la prima riga è uguale alla terza, e la 1ª e la 2ª sono lin. indep., si ha che

$$\text{rango}(A) = 2$$

Allora posso trovare M 3×3 ed una matrice N 4×4 invertibili tali che

$$M^{-1}AN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare M ed N seguo il teorema. Devo partire con una base del ker.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 3w = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2w = 0 \\ \text{uguale alla 1a} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 2z + 3w = 0 \\ 3y + 5w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$w = t \quad y = -t \quad z = s \quad x = -\frac{1}{2}(3y + 2z + 3w) = -\frac{1}{2}(-3t + 2s + 3t) = -s$$

$$(x, y, z, w) = (-s, -t, s, t) = s(-1, 0, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$$

$\uparrow$ v_3 $\uparrow$ v_4
 base di ker f

La completo ad una base di V aggiungendo

$$v_1 = (1, 0, 0, 0) \quad v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

Sarà vero che è una base di V ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N$$

Si vede subito che N è invertibile ($\det N \neq 0$) perché è triangolare superiore e sulla diag. sono tutti $\neq 0$.

Pongo $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$, cioè

$$w_1 = (2, 3, 2), \quad w_2 = (3, 2, 3)$$

e la completo ad una base di W aggiungendo $w_3 = (1, 0, 0)$.
Sarà vero che è una base di W ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$\det M \neq 0$, quindi è invertibile.

Se facessi il conto, vedrei che

$$M^{-1} A N$$

ha proprio la forma desiderata (2 uni ed il resto zeri).

Esempio 2 Prendiamo una seconda matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \cdot 1^a \text{ riga} + 2^a \text{ riga} \Rightarrow \text{rank}(B) = 2$$

Poichè $\text{rank}(B) = 2$, anche questa B ha la stessa forma canonica C di prima.

Dico che esistono $M \in M_{3 \times 3}$ ed $N \in M_{4 \times 4}$ invertibili tali che

$$B = M^{-1} A N$$

cioè posso passare dalla A dell'esercizio precedente alla B di questo esercizio.

Come trovo questa M e questa N ? In 2 passaggi.

① Trovo M_A ed N_A b.c.

$$C = M_A^{-1} A N_A$$

matrice in
forma
canonica

2 matrici dell'esercizio
precedente

② Allo stesso modo posso trovare M_B ed N_B t.c.

$$C = M_B^{-1} B N_B$$

↑ ↑ ↑
stessa le trovo con procedimento
di sopra analogo

Ora ricavo B :

$$B = M_B C N_B^{-1} = \boxed{M_B M_A^{-1}} \boxed{A} \boxed{N_A N_B^{-1}}$$

↓ ↓ ↓
 M^{-1} A N

Così ho scritto B come volevo. [Fare il conto in questo esempio!]

— o — o —