

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 34

Titolo nota

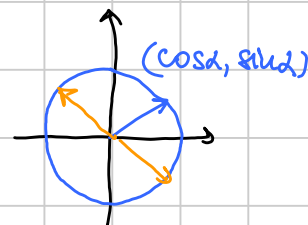
13/11/2014

Come sono fatte tutte le matrici 2×2 ortogonali?

Le colonne devono essere 2 vettori di lunghezza 1 perpendicolari tra di loro.

La prima colonna, avendo norma 1, sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ per un opportuno } \alpha$$



A questo punto ho solo 2 possibilità per la 2ª colonna

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$$

La seconda possibilità è

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha$$

Riassumendo, ci sono solo 2 possibilità

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1$$

Oss. Se cerco la matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$
e impongo $A^t = A^{-1}$ ottengo

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e questo sistema si può gestire, un po' più facilmente.

— o — o —

Esercizio Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che inizia con $(3, 4, 2)$

Idea: prendo una base qualunque che inizia con $(3, 4, 2)$ e uso GS per renderla ortogonale

Base qualunque : $v_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ha $\det = 3$, quindi le righe sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Ortogonalizzo $\{v_1, v_2, v_3\}$: $w_1 = v_1 = (3, 4, 2)$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (0, 1, 0) - \frac{4}{29} (3, 4, 2) \\ = \left(-\frac{12}{29}, \frac{13}{29}, -\frac{8}{29}\right)$$

Posso prendere più comodamente

$$w_2 = (-12, 13, -8)$$

[Verifica: $\langle w_2, w_1 \rangle = -36 + 52 - 16 = 0!$]

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\ = (0, 0, 1) - \frac{2}{29} (3, 4, 2) - \frac{-8}{144 + 169 + 64} (-12, 13, -8) \\ = \text{si fa il conto,}$$

Idea alternativa: produrre w_3 a partire da w_1 e w_2 mediante la formula misteriosa

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 3 & 4 & 2 \\ -12 & 13 & -8 \end{array}$$

$$\leadsto w_3 = (-58, 0, 87)$$

Da fare: verificare l'ortogonalità e che venga lo stesso a meno di costanti anche facendo GS,

— 0 — 0 —

Esercizio Ortogonalizzazione

$$\underbrace{(1, 0, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, -1, 0)}_{v_2}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{v_3}$$

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1, -1, 0) - \frac{1}{2} (1, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

Volevo posso prendere $w_2 = (1, -2, -1)$ [Verifica: ok]

Procedo w_3 con la formula

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \rightsquigarrow (2, 2, -2)$$

Volevo posso prendere $w_3 = (1, 1, -1)$ [Verifica ok]

$$w_1 = (1, 0, 1) \quad w_2 = (1, -2, -1) \quad w_3 = (1, 1, -1)$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Matrice ortogonale (le righe sono ortonormali)

$\downarrow \downarrow \downarrow$
sono una base
ortonormale di $\mathbb{R}^3$

L'inversa della matrice scritta è la trasposta.

Se invece voglio l'inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi per avere l'inversa basta dividere la 1^a riga per 2, la 2^a per 6 e la 3^a per 3.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -2/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Provare a verificare.

Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$f(1, 0, 1) = (2, 1, 0)$$

$$f(1, -2, -1) = (1, 1, 1)$$

$$f(1, 1, -1) = (3, 1, 1)$$

Fatto: esiste ed è unica perché in partenza ho una base.

Per trovare la matrice dalla canonica alla canonica posso

- metodo bonino, oppure
- cambio di base:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Applicazione f
strano to canonica

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -2/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Cambio base
canonica to strana

una è l'inversa
dell'altra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

← cambio di base strana → canonica

Se ho solo 2 condizioni:

$$f(1, 0, 1) = (3, 1, 4)$$

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

In questo caso avrei esistenza ma non unicità. Infatti posso completare la base aggiungendo $(0, 0, 1)$ e mandare $(0, 0, 1)$ dove mi pare, cioè $f(0, 0, 1) = (a, b, c)$.

Quindi ho infinite soluzioni che dipendono da 3 parametri.
Come sono fatte le matrici corrispondenti?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 4 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Verificare che con il metodo bonino venga lo stesso risultato.

Tutto questo funziona perché i 2 vettori in partenza nelle condizioni date sono lin. indep., quindi li mando dove mi pare.

Se le cond. erano

$$f(1, 1, 0) = (3, 1, 1)$$

$f(2, 2, 0) \rightarrow (6, 2, 2)$, allora la condizione non serve a niente, e la posso buttare via
 $\rightarrow (3, 5, 7)$, allora è incoerente con la precedente e non ci sono soluzioni

→ anzi infinite soluzioni dipendenti da 6 parametri

Se metto 3 condizioni in $\mathbb{R}^3$, può non esistere o non essere unica?

Sì, se i 3 vettori in partenza non sono lin. indep.

Avrai in questo caso

→ o non esiste

→ oppure se esiste non è unica.

— o — o —