

MATRICI ORTOGONALI

Teorema Sia A una matrice $n \times n$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(1) $A^{-1} = A^t$.

(2) Le colonne di A sono ortonormali.

(3) Le righe di A sono ortonormali.

Def. Se succede una qualunque delle 3 proprietà precedenti, allora la matrice si dice ortogonale.

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2)

Per ipotesi $A^{-1} = A^t$. Come kni le colonne devono essere ortonormali

$$A = \left(c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n \right) \quad A^t = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Id} = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} \cdot \left(c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_n \right) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

L'elemento in posizione (i, j) della matrice prodotto è $\langle c_i, c_j \rangle$ e quindi questo è 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$.

Quindi le colonne sono ortonormali.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se le colonne sono ortonormali, allora $A^t \cdot A = \text{Id}$ e quindi $A^t = A^{-1}$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Guardo le righe

$$Id = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \overline{R_1} \\ \overline{R_2} \\ \vdots \\ \overline{R_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_n \end{pmatrix}$$

L'elemento (i,j) del prodotto è $\langle R_i, R_j \rangle$ e questo è 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$. Quindi le righe sono ortonormali.

(3) $\Rightarrow$ (1) Righe ortonormali $\Rightarrow A \cdot A^t = Id \Rightarrow A^t = A^{-1}$

— o — o —

Oss. Se voglio dim. che (2) $\Leftrightarrow$ (3), il modo più comodo e veloce è di passare attraverso (1).

— o — o —

Oss. Se le colonne di A sono solo ortogonali, allora $A^t \cdot A$ viene una matrice diagonale, e gli elementi sulla diagonale sono proprio $\langle C_i, C_i \rangle$.

— o — o —

Teorema (Proprietà delle matrici ortogonali')

Sia A una matrice ortogonale. Allora

(1) $\det A = \pm 1$

(2) A^{-1} è ortogonale

(3) Se anche B è ortogonale, allora AB è ortogonale

Dim. (1) $A \cdot A^t = Id$ Per Binet si ha:

$$\det(A) \cdot \det(A^t) = \det(Id)$$

"

"

"

$$\det(A) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

(2) $A^{-1} = A^t$. Se A è ortogonale, allora le sue colonne sono ortonormali, ma allora le righe di A^t sono ortonormali, ma allora A^t è ortogonale, quindi anche A^{-1} lo è

(3) Ipotesi: $A^{-1} = A^t$ $B^{-1} = B^t$

Tesi: $(AB)^{-1} = (AB)^t$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (AB)^t$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 proprietà ipotesi proprietà trasposte
 inversa

Oss. L'inversa di AB è $B^{-1}A^{-1}$. Infatti

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot \boxed{B \cdot B^{-1}} \cdot A^{-1} = A \cdot \underset{\text{Id}}{I} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = Id.$$

Oss. le matrici ortogonali sono invertibili

Achtung! Se moltiplico una matrice ortogonale per un numero diverso da ± 1 , quello che ottengo NON è ortogonale. Anche la somma di due matrici ortogonali in generale non è ortogonale.

PROIEZIONI ORTOGONALI Dato un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sappiamo che

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

e quindi ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in modo unico come

$$v = \underset{\in W}{w_1} + \underset{\in W^\perp}{w_2}$$

Allora

- w_1 è la proiezione ortogonale di v su W
- w_2 " " " " " " " $W^\perp$

Operativamente: scrivo una base di $\mathbb{R}^n$ che sia l'unione di una base di W e una di $W^\perp$, poi prendo le componenti di v rispetto a W o $W^\perp$.

Esempio 1 $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \}$

Base: $\underbrace{(1, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(-2, 0, 1)}_{v_2}$

Base ortogonale: $(1, 1, 0) = w_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (-2, 0, 1) - \frac{-2}{2} (1, 1, 0) \\ = (-2, 0, 1) + (1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

$(1, 1, 0), (-1, 1, 1)$: base ortogonale

Base ortogonale di $\mathbb{R}^3$: $\underbrace{(1, 1, 0)}_{w_1}, \underbrace{(-1, 1, 1)}_{w_2}, \underbrace{(1, -1, 2)}_{w_3}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Base di } W} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Base di } W^\perp}$

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^3$, come calcolo la sua proiezione ^{ortog.} su W ?

Scrivo $v = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$ e poi prendo $c_1 w_1 + c_2 w_2$

In particolare $\text{pr}_W(v) = c_1 w_1 + c_2 w_2$

$$= \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

↑ ↑
se la base è ortonormale,
questi sono 1.

Desiderio: avere una matrice che prende in INPUT v (o meglio le sue componenti rispetto alla canonica) e restituisce $\text{pr}_W(v)$ (o meglio le sue componenti)

Chi è questa matrice

1ª possibilità

$$\left. \begin{aligned} \text{pr}_W(w_1) &= w_1 \\ \text{pr}_W(w_2) &= w_2 \\ \text{pr}_W(w_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{chi sta sul piano} \\ &\text{rimane se stesso} \\ &\text{chi è } \perp \text{ al piano va in } 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &\rightarrow \\ w_2 &\rightarrow \\ w_3 &\rightarrow \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(w_1) \quad f(w_2) \quad f(w_3)$

Matrice che rappresenta la proiezione dalla base $\{w_1, w_2, w_3\}$ in se

2ª possibilità

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow \\ e_2 &\rightarrow \\ e_3 &\rightarrow \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(w_1) \quad f(w_2) \quad f(w_3)$

Matrice che rappresenta la proiezione dalla base $\{w_1, w_2, w_3\}$ alla canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$

Per ottenere la matrice dalla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ in se può essere utile la matrice di cambio di base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Questa matrice fa il cambio base dalla $\{w_1, w_2, w_3\}$ alla canonica

Se voglio andare dalla canonica alla canonica devo usare

$$M A M^{-1}$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
 dalla strana alla canonica dalla canonica alla strana

oppure

$$B M^{-1}$$

$\uparrow \quad \nwarrow$
 strana to canonica canonica to strana

Verificare che viene lo stesso risultato!

— o — o —