

ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO

Def. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.

Si definisce ortogonale di W l'insieme

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

↑
vettori che sono perpendicolari
a tutti i vettori di W

Proposizione $W^\perp$ è in realtà un sottospazio vettoriale

Dim. Devo fare 2 verifiche

Somma: se $v_1 \in W^\perp$ e $v_2 \in W^\perp$, è ancora vero che $v_1 + v_2 \in W^\perp$?

Preso un qualunque $w \in W$,

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \underbrace{\langle v_1, w \rangle}_0 + \underbrace{\langle v_2, w \rangle}_0 = 0 \quad \text{Ok}$$

Prodotto: se $v \in W^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$, è ancora vero che $av \in W^\perp$?

$$\text{Preso } w \in W \text{ ho che } \langle av, w \rangle = a \underbrace{\langle v, w \rangle}_0 = 0 \quad \text{Ok.}$$

Esempi concreti

① $W =$ piano in $\mathbb{R}^3$, allora $W^\perp =$ retta per l'origine $\perp$ al piano per l'origine

② $W =$ retta in $\mathbb{R}^3$ per l'origine, allora $W^\perp =$ piano per l'origine $\perp$ alla retta

Teorema (Proprietà dell'ortogonale) Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottosp. vett.

Allora

(i) $W \cap W^\perp = \{0\}$

(ii) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

(iii) $(W^\perp)^\perp = W$ (facendo 2 volte l'ortogonale si torna indietro)

Dim. (i) Sia $v \in W \cap W^\perp$. Allora v deve essere ortogonale a tutti gli elementi di W , quindi anche a se stesso, cioè $\langle v, v \rangle = 0$, cioè $v = 0$.

(ii) Devo dimostrare che $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$; a quel p.to la somma è diretta perché $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Prendo una base $\{w_1, \dots, w_k\}$ di W . La completo ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $w_{k+1}, \dots, w_n$.

Ortogonalizzo tutto con GS (Gram-Schmidt).

Otengo una nuova base di $\mathbb{R}^n$

$\underbrace{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_k}_{\downarrow \text{Base ortogonale di } W \text{ (sono ortogonali e } \text{Span}\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}}$
 $\underbrace{\hat{w}_{k+1}, \dots, \hat{w}_n}_{\downarrow \text{sono una base di } W^\perp}$

perché sono ortogonali ai precedenti e sono in numero sufficiente

Conseguenza: se W ha dimensione k , allora $W^\perp$ ha dimensione $n-k$ (non può averla più grande perché altrimenti l'intersezione non potrebbe essere il solo $\{0\}$)

Ogni vettore v di $\mathbb{R}^n$ si scrive dunque come

$$v = \underbrace{c_1 \hat{w}_1 + \dots + c_k \hat{w}_k}_{\in W} + \underbrace{c_{k+1} \hat{w}_{k+1} + \dots + c_n \hat{w}_n}_{\in W^\perp}$$

(iii) Sostanzialmente ovvio $(W^\perp)^\perp =$ vettori ortogonali a $W^\perp$

Due vettori di W e $W^\perp$ sono ortogonali tra di loro e per ragioni di dimensione ci deve essere uguaglianza.

— 0 — 0 —

Esercizio classico: dato $W \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto con equazioni o come Span, trovare $W^\perp$ e trovare basi ortogonali di W e $W^\perp$.

Esempio 1 In $\mathbb{R}^3$ prendiamo $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$

① Trovo una base di W : $\{(-3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$, cioè
 $W = \text{Span} \{ \underbrace{(-3, 0, 1)}_{v_1}, \underbrace{(-2, 1, 0)}_{v_2} \}$

② Trovo una base ortogonale di W , facendo G-S a partire da v_1 e v_2 :

$$w_1 = v_1 = \boxed{(-3, 0, 1)}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (-2, 1, 0) - \frac{6}{10} (-3, 0, 1)$$

$$= (-2, 1, 0) - \left(-\frac{9}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right)}$$

Verifica: $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ ok.

Volendo una base ortogonale è anche: $w_1 = (-3, 0, 1)$, $w_2 = (1, -5, 3)$

In particolare è anche vero che $W = \text{Span} \{(-3, 0, 1), (1, -5, 3)\}$

③ Trovo $W^\perp$: so già che avrà dimensione $3 - 2 = 1$.

Quindi mi basta trovare un vettore $\perp$ a w_1 e w_2 .

Come posso fare?

1° modo Lo cerco del tipo (a, b, c) impostando il sistema

$$\begin{aligned} \langle (a, b, c), (-3, 0, 1) \rangle &= 0 \\ \langle (a, b, c), (1, -5, 3) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Risolvere...

2° modo Uso la formula misteriosa a partire da $(-3, 0, 1)$ e $(1, -5, 3)$
oppure a partire da $(-3, 0, 1)$ e $(-2, 1, 0)$

3° modo Uso gli a, b, c del piano, cioè $(1, 2, 3)$

Ora so che $W^\perp = \text{Span} \{(1, 2, 3)\}$

Alla fine, volendo, abbiamo che

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span} \left\{ \underbrace{(-3, 0, 1), (1, -5, 3)}_{\text{base ortogonale di } W}, \underbrace{(1, 2, 3)}_{\text{base (ortog.) di } W^\perp} \right\}$$

base ortogonale di $\mathbb{R}^3$

Domanda ulteriore. Chi sono le componenti di $(1, 1, 1)$ rispetto a questa base?

$$c_1 = \frac{\langle (1, 1, 1), (-3, 0, 1) \rangle}{\langle (-3, 0, 1), (-3, 0, 1) \rangle} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

e così via per le altre, _ o _ o _

Esempio 2 $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x+y = z-2w = 0\}$

$W =$ soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x+y=0 \\ z-2w=0 \end{cases}$$

Base di W : $\underbrace{(-1, 1, 0, 0)}_{v_1}, \underbrace{(0, 0, 2, 1)}_{v_2}$

Se volessi una base ortogonale di W ? Uso gli stessi, che sono già ortogonali!

$W^\perp$: come lo trovo? Per essere ortogonali a tutto W , basta essere ortogonali ad una base di W , quindi $W^\perp$ è

$$W^\perp = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{-x+y=0}_{\text{ortogonale a } v_1}, \underbrace{2z+w=0}_{\text{ortogonale a } v_2} \}$$

Quindi devo risolvere il sistema
$$\begin{cases} -x+y=0 \\ 2z+w=0 \end{cases}$$

Una base delle soluzioni è $\underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{v_3}, \underbrace{(0, 0, 1, -2)}_{v_4}$

Tra l'altro $\langle v_3, v_4 \rangle = 0$. Concludendo:

$$\begin{aligned} W &= \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0, z-2w=0 \} && \text{eq. cartesiane} \\ &= \text{Span} \{ \underbrace{(1, -1, 0, 0)}_{v_1}, \underbrace{(0, 0, 2, 1)}_{v_2} \} && \text{parametrica (come Span)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0, 2z+w=0 \} && \text{cartesiana} \\ &= \text{Span} \{ \underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{v_3}, \underbrace{(0, 0, 1, -2)}_{v_4} \} && \text{parametrica} \end{aligned}$$

Infine: v_1, v_2, v_3, v_4 sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.
— 0 — 0 —