

BASI ORTOGONALI

BASI ORTONORMALI

Def. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ n vettori in $\mathbb{R}^n$.

- Si dice che costituiscono una base ortogonale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

- Si dice che costituiscono una base ortonormale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{come prima})$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

↓ equivalente a dire che sono vettori di lunghezza 1.

Esempio La base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ è ortonormale.

Fatto semplice Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base ortogonale, allora

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \quad \text{sono una base ortonormale.}$$

Dim. Se $i \neq j$, allora $\langle w_i, w_j \rangle = \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle$

$$= \frac{1}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} \cdot \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=0} = 0$$

$$\langle w_i, w_i \rangle = \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2} \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{=1} = 1.$$

Oss. Se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ e $v_i \neq 0$ per ogni i , allora per forza $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti, quindi se sono in numero giusto costituiscono per forza una base.

Dim. Supponiamo per assurdo che non siano lin. indip.
Allora c'è una loro comb. lin.

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

con almeno un coeff. $\neq 0$. Sia $c_i \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle = c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &\quad \swarrow \text{fatti nulli tranne l'i-esimo} \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad \neq 0 \quad \neq 0 \end{aligned}$$

ASSURDO

— 0 — 0 —

Teorema Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ qualunque.

Allora la componente di v rispetto a v_i è $\langle v, v_i \rangle$.

Di conseguenza

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

Dim. Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, posso scrivere in modo unico

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

↑ ↑
componenti di v

$$\begin{aligned} \langle v, v_1 \rangle &= \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_1 \rangle = c_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_1 + c_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{\text{tutti 0}} + \dots \\ &= c_1 \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che $c_1 = \langle v, v_1 \rangle$

Allo stesso modo si dimostra che $c_i = \langle v, v_i \rangle$, da cui la tesi. $\square$

— 0 — 0 —

Oss. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ era solo ortogonale, avrei ottenuto

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Dato un vettore, come determino le sue componenti rispetto ad una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ data?

1° modo Scrivo $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ con coeff. $c_1, \dots, c_n$ incogniti. Risolvendo un sistema lineare opportuno trovo $c_1, \dots, c_n$.

2° modo Se conosco le componenti di v rispetto ad una base "comoda" $\{w_1, \dots, w_n\}$, posso ottenere le componenti rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ costruendo una volta per tutte la matrice di cambio di base.

3° modo Se la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è **ortonormale** basta calcolare il prodotto scalare $\langle v, v_i \rangle$.

Se è solo ortogonale, si calcola $\frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.

— o — o —

Come trovo basi ortonormali?

Risposta: procedimento di **ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT**

INPUT: base $\{v_1, \dots, v_n\}$ qualunque (di $\mathbb{R}^n$)

OUTPUT: base $\{w_1, \dots, w_n\}$ ortogonale tale che

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \quad \forall k=1, \dots, n$$

Algoritmo: $w_1 = v_1$ (questo rende banalmente vero che $\text{Span}\{v_1\} = \text{Span}\{w_1\}$)

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

Idea: voglio $w_2 = v_2 + a v_1$ e scelgo a in modo tale che $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$.

Imponendo l'equazione viene

$$0 = \langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 + a v_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + a \langle v_1, w_1 \rangle$$

da cui

$$a = - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle v_1, w_1 \rangle} = - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

da cui la formula di sopra.

Questo garantisce che $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$ e $\text{Span} \{w_1, w_2\} = \text{Span} \{v_1, v_2\}$.

Ora procedo ponendo

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

Idea: cerco w_3 della forma $w_3 = v_3 + a w_1 + b w_2$

e impongo $\langle w_3, w_1 \rangle = \langle w_3, w_2 \rangle = 0$

$$0 = \langle w_3, w_1 \rangle = \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_1 \rangle = \langle v_3, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle + b \langle w_2, w_1 \rangle$$

0

$\leadsto$ trovo a

$$0 = \langle w_3, w_2 \rangle = \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_2 \rangle = \langle v_3, w_2 \rangle + a \langle w_1, w_2 \rangle + b \langle w_2, w_2 \rangle$$

0

$\leadsto$ trovo b .

Descrizione generale dell'algoritmo:

$$w_1 = v_1$$

$\vdots$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

$$= v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

Osservazione Una volta prodotta una base ortogonale, è immediato averne una ortonormale.

Esempio Ortogonalizzare $\overset{v_1}{(1, 0, 1)}, \overset{v_2}{(0, 2, 1)}, \overset{v_3}{(1, 3, 1)}$ come base di $\mathbb{R}^3$.

$$w_1 = v_1 = \boxed{(1, 0, 1)}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (0, 2, 1) - \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{2} (1, 0, 1) = (0, 2, 1) - \frac{1}{2} (1, 0, 1) = \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= (1, 3, 1) - \frac{2}{2} (1, 0, 1) - \frac{-\cancel{\frac{1}{2}} + 6 + \cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

$$= (1, 3, 1) - (1, 0, 1) - 6 \cdot \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) = \dots$$

Verificare a mano che sono venuti 3 vettori ortogonali.

— 0 — 0 —