

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Consideriamo un sistema lineare $Ax = b$ (m equazioni, n incognite)

Consideriamo la matrice completa $A' = (A | b)$.

Allora il sistema lineare ha soluzione se e solo se

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A'$$

Quando ha soluzione, allora detto r il valore comune dei due ranghi, l'insieme delle soluzioni dipende da $n-r$ parametri.

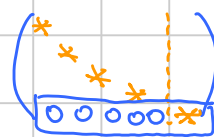
Esempio 37 equazioni, 52 incognite e supponiamo

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A' = 25.$$

Allora il sistema ha soluzione dipendente da $52 - 25 = 27$ parametri. Lavorando alla Gauss trovo 25 PIVOT, quindi ho 27 colonne senza PIVOT che corrispondono ai parametri liberi.

Oss. In generale

$\text{Rango } (A') = \begin{cases} \text{Rango } (A) & \leadsto \text{sistema ha soluzione} \\ \text{Rango } (A) + 1 & \leadsto \text{il sistema a scala diventa del tipo} \end{cases}$



rende impossibile l'esistenza di soluzioni

Dim. alternativa: c'è soluzione se e solo se $b \in \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$,
cioè se e solo se

$$\begin{aligned} \text{Span}(C_1, \dots, C_n) &= \text{Span}(C_1, \dots, C_n, b) \\ \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \\ \dim &= \text{Rango } (A) \qquad \dim = \text{Rango } (A'). \end{aligned}$$

Caso particolare: Dato un sistema $m \times n$, se $\text{rang}(A) = n$ allora c'è soluzione qualunque sia b e la soluzione è unica.

Dim. $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ n+1 \end{array}$

$$n \leq \text{Rang}(A') \leq \min\{m, n+1\} = n$$

$\uparrow$
 $\text{Rang}(A)$

Quindi per forza $\text{rang } A' = \text{rang } A$.

L'insieme delle soluzioni dipende da $n - \underbrace{r}_n$ parametri $\rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow$

Oss. Avevamo visto a suo tempo che ogni soluzione del sistema

$$Ax = b$$

si scrive nella forma

$$x = x_0 + w$$

$\uparrow$
soluzione
fissata

$\uparrow$
sol. generica di $Aw = 0$, cioè
 w è un generico el. del $\ker$,
che ha dimensione $n - r$

$\rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow$

Esempio 1

$$2x + 3y + z = 1$$

$$x - z = a$$

Domanda: per quali valori di a il sistema ha soluzioni?

$\text{Det} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array} \right)$$

$\text{rang } A = 2$

$$2 \leq \text{Rang } A' \leq 2$$

$\uparrow$
ci sono solo 2 righe

Quindi sempre $\text{rang } A = \text{rang } A' = 2$, quindi sempre ci sono soluzioni dipendenti da $m - r = 3 - 2 = 1$ parametri

Esempio 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Sistema di 3 equ. in 3 incognite
con un parametro

Det della sottomatrice senza la 3ª colonna:

$$-6 + 10 - 36 - 20 \neq 0$$

Quindi $\text{Rango } A' = 3$.

Ma allora c'è soluzione $\Leftrightarrow \text{Rango } A = 3$

$$\Leftrightarrow \det A \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + 12a + a - 18$$

$$\Leftrightarrow 13a - 21 \neq 0$$

Esempio 3 $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in questo spazio prendiamo i polinomi

$$p_1(x) = x^2 + 1$$

$$p_2(x) = x^3 + 1$$

$$p_3(x) = x^2 - x$$

Domanda: $\dim(\text{Span}(p_1, p_2, p_3))$

1º modo Spero che siano lin. indep., così $\dim = 3$. Per vedere se lo sono, risolvo il sistema $ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0$ e spero che l'unica sol. sia $a=b=c=0$.

2º modo Scrivo le componenti di p_1, p_2, p_3 rispetto ad una base, ad esempio la canonica,

$$\begin{matrix} & 1 & x & x^2 & x^3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Spero che abbia rango $= 3$.

Spero di trovare un minore 3×3 con

$$\det \neq 0$$

Se elimino la prima colonna si vede subito che ciò che resta ha $\det \neq 0$, quindi il rango è 3.

Esempio 4 In $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ considero i polinomi

$$p_1(x) = x^2 - x + 1$$

$$p_2(x) = x^2 - ax$$

$$p_3(x) = x + 2$$

Calcolare, al variare di a , la dimensione dello span (p_1, p_2, p_3)

Passo in componenti, e costruisco la matrice

$$\begin{matrix} & 1 & x & x^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Osservo che $\text{Det } A_{2,2} \neq 0$ sempre, quindi $\dim \geq 2$ sempre.

Quindi $\dim = 3$ se e solo se $\text{Det} \neq 0$ e questo è un conto.

Esercizio È data una matrice 4×4 di cui tutto è fisso, meno un elemento, diciamo $a_{2,3}$.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Posso scegliere il valore di $a_{2,3}$ in modo che $\text{Det } A$ venga quello che voglio, ad esempio 0 oppure 2014?

Immagino di fare LAPLACE rispetto alla 2ª riga:

$$\underbrace{-a_{2,1} \cdot \text{Det } A_{2,1}}_{\text{fisso}} + \underbrace{a_{2,2} \cdot \text{Det } A_{2,2}}_{\text{fisso}} - \underbrace{a_{2,3} \cdot \text{Det } A_{2,3}}_{\substack{\downarrow \\ \text{scelta} \\ \text{mia}}} + \underbrace{a_{2,4} \cdot \text{Det } A_{2,4}}_{\text{fisso}}$$

Ci sono 2 casi:

→ se $\text{Det } A_{2,3} = 0$, allora il $\text{Det } A$ non cambia qualunque valore io dia al parametro

→ se $\text{Det } A_{2,3} \neq 0$, allora $\text{Det } A$ è di 1° grado rispetto a $a_{2,3}$, quindi posso ottenere quello che voglio.

— 0 — 2014 —