

RANGO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $m \times n$. Si definiscono

- R-rango il massimo numero di righe lin. indep.
- C-rango " " " " colonne " "
- D-rango la massima dimensione di una sottomatrice quadrata con $\det \neq 0$ (massima dim. di un minore non nullo)

Oss. R-rango $\leq m$, C-rango $\leq n$, D-rango $\leq \min\{m, n\}$.

Def. equivalenti

Il C-rango è

- (i) il massimo k per cui esistono k colonne lin. indep.
- (ii) $\dim \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$ dove $C_1, \dots, C_n$ sono le colonne di A
- (iii) $\dim(\text{Im}(A))$ nel momento in cui pensiamo A come applic. lin.
 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

L' R-rango è

- (i) il massimo k k righe lin. indep.
- (ii) $\dim \text{Span}(R_1, \dots, R_m)$ dove $R_1, \dots, R_m$ sono le righe di A
- (iii) $\dim(\text{Im}(A^t))$.

Il D-rango è

- (i) il massimo k per cui esiste una sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$.

TEOREMA Per ogni matrice A si ha R-rango = C-rango = D-rango.

Oss. Dim. il te., ovvero che $\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Proposizione 1 (Rango e algoritmo di Gauss)

Le operazioni dell'algoritmo di Gauss lasciano invariato R-rango e C-rango.

Proposizione 2 Se S è una matrice a scala, allora

$$\text{R-rango}(S) = \text{C-rango} = \text{numero dei pivot} \\ = \text{numero righe sopravvissute}$$

Proposizione 3 Una matrice quadrata $n \times n$ a scala ha

$$\text{R-rango} = \text{C-rango} = n$$

se e solo se $\text{Det} \neq 0$.

Dalle proposizioni segue il teorema.

Dim. Prop. 1 Iniziamo con il R-rango

Se scambio le righe, è ovvio che $\dim \text{Span}(R_1, \dots, R_n)$ non cambia.
Se sostituisco R_j con $aR_j + bR_i$ con $a \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} \text{Span}(R_i, R_j, \text{altr. righe}) &= \text{Span}(R_i, R_j, aR_j + bR_i, \text{altr. righe}) \\ &\quad \uparrow \text{posso eliminare il 3°} \\ &= \text{Span}(R_i, aR_j + bR_i, \text{altr. righe}) \\ &\quad \uparrow \text{posso eliminare il 2°} \end{aligned}$$

Quindi non cambiano le dim, che sono il R-rango.

Continuiamo al C-rango Prendo una matrice A e lavorando alla Gauss ottengo una matrice B . Per la teoria dei sistemi lineari, le soluzioni di $Ax = 0$ sono tutte e sole le soluzioni di $Bx = 0$
 $\ker A$ $\ker B$

Ma allora $\ker A = \ker B$ e quindi $\dim \ker A = \dim \ker B$
e pertanto

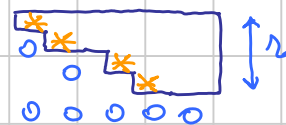
$$\begin{aligned}
 \text{C-rango}(A) &= \dim(\text{Im}(A)) && (\text{rank-nullity}) \\
 &= n - \dim(\ker(A)) \\
 &= n - \dim(\ker(B)) \quad \uparrow \\
 &= \dim(\text{Im}(B)) && (\text{rank-nullity}) \\
 &= \text{C-rango}(B) \\
 &\quad \text{--- o --- o ---}
 \end{aligned}$$

Oss. È vero che $\ker A = \ker B$

Non è vero che $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$

È vero che $\dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(B))$
 --- o --- o ---

Dim. Prop. 2 Prendiamo una matrice $m \times n$ a scala. Supponiamo che ci siano esattamente r righe non nulle, quindi esattamente r PIVOT.



R-rango È ovvio che non possono esserci più di r righe lin. indep. Afferisco che le prime r righe $R_1, \dots, R_r$ sono lin. indep. Prendiamo una comb. lin.

$$c_1 R_1 + \dots + c_r R_r = 0$$

Guardando alla prima posizione (cor. al 1° pivot) si vede che $c_1 = 0$. Ma allora anche $c_2 = 0$ (basta guardare alla posizione del 2° pivot). E così via.

C-rango $\text{Span}(c_1, \dots, c_n) \subseteq \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$,
 quindi $\text{C-rango} = \dim \text{Span}(c_1, \dots, c_n) \leq r$

Devo dimostrare che esistono r colonne lin. indep.

A tal fine basta scegliere quelle con i PIVOT, che risultano lin. indep. per lo stesso motivo di sopra (questa volta si parte dal fondo).

--- o --- o ---

Prop 1 + Prop 2 $\Rightarrow$ R-rango = C-rango per ogni matrice A

Dim. Prendo A e lavoro alla Gauss fino ad avere S a scala.
A questo p.to

$$\begin{array}{ccccccc} \text{R-rango}(A) & = & \text{R-rango}(S) & = & \text{C-rango}(S) & = & \text{C-rango}(A) \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{Prop 1} & & \text{Prop 2} & & \text{Prop. 1.} & \end{array} \quad \square$$

Dim. Prop. 3 Se una matrice a scala $n \times n$ ha n pivot, allora tutti gli el. della diagonale principale devono essere $\neq 0$, cioè tutti gli scalini sono scalini da 1.

Quindi R-rango = C-rango = n
 $\Rightarrow \text{Det} \neq 0$

$\begin{array}{cccccc} * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & & & & * \end{array}$

se c'è uno scalino da almeno, mi ritrovo in fondo una riga tutta nulla.

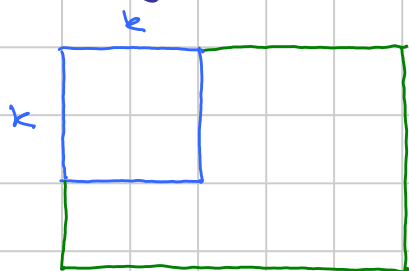
Oss. Questo completa gli obiettivi del determinante, cioè per una matrice quadrata

- righe lin. dip. $\Rightarrow \text{Det} = 0$ (fatto quasi subito)
- righe lin. indip $\Rightarrow \text{Det} \neq 0$.

— 0 — 0 —

Dim. che D-rango = R-rango

D-rango $\leq$ R-rango Sia $r = \text{R-rango}$. Sia $k > r$. Voglio dire che ogni sottomatrice $k \times k$ ha $\text{det.} = 0$

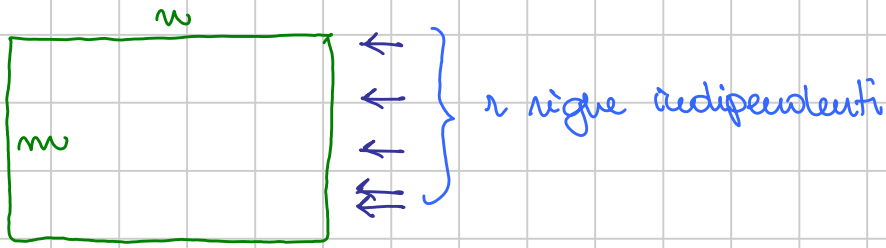


} k righe: sono per forza dipendenti come righe della matrice grande (altrimenti R-rango sarebbe $\geq k$)

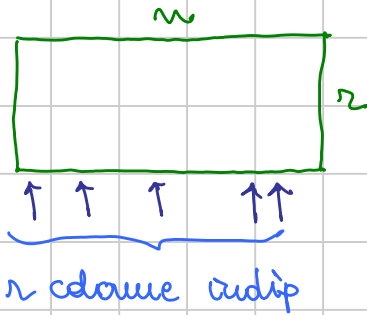
In particolare le k righe sono lin. dip. anche come righe della matrice piccola.

Quindi la matrice piccola ha per forza $\text{Det} = 0$.

$D\text{-rango} \geq R\text{-rango}$ Posto come sopra $r = R\text{-rango}$, devo trovare una sottomatrice $r \times r$ con $\det \neq 0$.



Prendo queste ed escludo le altre. Ottengo



Questa matrice $r \times n$ ha $R\text{-rango} = r$,

Ma allora ha pure $C\text{-rango} = r$

Ma allora ha r colonne lin. indep.

Prendo queste ed escludo le altre. Ottengo



Questa matrice $r \times r$ ha r colonne indep, quindi $R\text{-rango} = C\text{-rango} = r$.

Ma essendo quadrata avrà per forza $\det \neq 0$ (basta ridurla a scala e usare la Prop. 3).

— o — o —