

SVILUPPI DI LAPLACE

SOTTOMATRICI E MINORI Sia M una matrice $m \times n$, anche non quadrata. Una sottomatrice $R \times k$ è una qualunque matrice $R \times k$ ottenuta eliminando da M $(m-R)$ righe e $(n-k)$ colonne, anche in maniera non consecutiva

Esempio

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 13 & 5 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \text{ possibile sottomatrice}$$

Nel caso in cui A sia una matrice $n \times n$ quadrata, si indica con A_{ij} la matrice quadrata $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la riga i e la colonna j .

Esempio

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{array} \quad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si definiscono MINORI i determinanti delle sottomatrici quadrate.

Sviluppi di Laplace per colonne

Rispetto alla 1ª colonna Sia $A = \{a_{i,j}\}$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \cdot \text{Det } A_{k,1}$$

Esempio 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\oplus 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \ominus 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \oplus 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

I segni sono alterni!

$$= 32 - 3 \cdot 14 + 2 \cdot (-6) = 32 - 42 - 12 = -22 = \text{Det } A$$

Rispetto alla j -esima colonna

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \text{Det } A_{kj}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Rispetto alla 2^a colonna:

$$- 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) - 5 = -2 - 15 - 5 = -22 = \text{Det } A$$

Esercizio Verificare che venga -22 anche rispetto alla 3^a colonna o rispetto a SARRUS.

Laplace rispetto alla riga i -esima

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \cdot \text{Det } A_{ik}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Rispetto alla 3^a riga;

$$2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - (-1) \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-6) + (-5) + 5 \cdot (-1) = -12 - 5 - 5 = -22$$

Esempio

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ \cancel{7} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{6} \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 9 \end{matrix}$$

Calcolare il Determinante.

Opzione 1: lavorare alla Gauss

Opzione 2: Laplace astuti, cioè usare la terza riga o la 4^a colonna.

Uso la 4^a colonna

$$\text{Det (iniziale)} = +3 \cdot \text{Det } A_{2,4} = 3 \cdot 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ 12 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

↑
il segno va
fatto nella 4x4

e questo si può concludere con Sarrus.

— 0 — 0 —

Conseguenza

$\text{Det } A = \text{Det } A^t$ per ogni matrice quadrata A

Dici. Dato per buono che gli sviluppi di Laplace, comunque fatti, danno il determinante basta osservare che

Sviluppo di $\text{Det } A$ rispetto alla 1^a colonna =

" " $\text{Det } A^t$ " alla 1^a riga. □

— 0 — 0 —

Teorema misterioso Lo sviluppo di Laplace rispetto ad una qualunque colonna fornisce una funzione che verifica $(\text{Det } s), \dots, (\text{Det } 4)$.

Conseguenze. Dato per buono il teorema precedente segue che

- il Det esiste, cioè c'è almeno una funzione che verifica i 4 assiomi
- poiché sappiamo da Gauss che la funzione è unica, allora il risultato non può dipendere dalla colonna.

— 0 — 0 —

Teorema Gli sviluppi per riga danno lo stesso risultato di quelli per colonna.

Dim. Ci sono 3 casi

1° caso La riga rispetto a cui sviluppo ha tutti 0 e un solo 1.

Cosa succederebbe se sviluppassi per colonna?

Troverei tutti 0 (dovuti alla riga di zeri) tranne in posizione i, j dove trovo

$$(-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \text{Det } A_{i,j}$$

che è lo stesso che trovo lavorando sulla riga i .

2° caso La riga rispetto a cui sviluppo ha tutti 0 e un solo 1. Questo è uguale al precedente

3° caso Sulla riga in questione c'è di tutto

A diagram representing a row in a matrix. A horizontal row of elements is shown inside large parentheses. The elements are $0 \dots 0 1 0 \dots 0$. The '1' is at the j -th position, indicated by a pink arrow labeled j pointing down to it. The entire row is enclosed in a pink vertical rectangle. To the left of the row, an orange arrow labeled i points to the row, indicating it is the i -th row.

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Det originario = somma degli n determinanti
 = (per il caso precedente)

$$= (-1)^{i+1} a_{i,1} \cdot \text{Det } A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} \cdot \text{Det } A_{i,2} + \dots$$

e questo è lo sviluppo per riga.

— 0 — 0 —

Operativamente, come calcolo un determinante?

- Per il caso generale, Gauss è un metodo efficiente
- Se ci sono tanti zeri, allora un Laplace astuto può essere utile.
- In dim 2 e 3 si usa SARRUS,

— 0 — 0 —