

Domande

- ① Dati n vettori, come stabilisco se sono linearmente indipendenti?
- ② Dati n vettori, come determino la dimensione del loro Span?

DETERMINANTE

RANGO

DETERMINANTE Due modi di vederlo

- ① Funzione che prende in INPUT n vettori in $\mathbb{R}^n$ e restituisce in OUTPUT un numero reale. Il numero restituito è 0 se e solo se gli n vettori in input sono lin. dipendenti.
- ② Funzione che prende in INPUT una matrice $n \times n$ e restituisce un numero.

Il collegamento tra le 2 presentazioni è che la matrice $n \times n$ è quella ottenuta usando come RIGHE gli n vettori della presentazione ①.

Indice

- ① Proprietà fondamentali del determinante.
- ② Conseguenze delle precedenti.
- ③ Determinante nel caso 2×2 e 3×3 .
- ④ Determinante e algoritmo di Gauss.
- ⑤ Sviluppi di LAPLACE per righe.
- ⑥ " " " per colonne.
- ⑦ Det della matrice trasposta
- ⑧ Teorema di BINET
- ⑨ Sviluppi di LEIBNITZ
- ⑩ Applicazioni classiche:
 - formula di CRAMER per sistemi lineari
 - formula per l'inversa
 - formula misteriosa per vettori perpendicolari

① Definizione assiomatica di determinante

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori qualunque di $\mathbb{R}^n$.

Il Det è una funzione che soddisfa queste 4 proprietà:

(Det 1) $\text{Det}(e_1, \dots, e_n) = 1$ (pensati gli n vettori come righe, viene fuori la matrice identica)

(Det 2) Se tra gli n vettori ce ne sono due uguali, allora $\text{Det} = 0$.

Se $v_i = v_j$ per $i \neq j$, allora $\text{Det}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

(Osservazione: se ci sono 2 vettori uguali, allora $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti, quindi è ragionevole pretendere $\text{Det} = 0$)

(Det 3) $\text{Det}(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$

(se moltiplico uno dei vettori per λ , la costante "esce fuori")

(Det 4) "la somma esce fuori":

$$\text{Det}(v_1, \dots, \bar{v}_i + \hat{v}_i, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

Oss. (Det 3) e (Det 4) sono equivalenti a dire che il Det, visto come funzione di un singolo vettore v_i (pensando gli altri $n-1$ come fissi, è una funzione lineare.

— o — o —

Teorema misterioso (esistenza e unicità)

Esiste un'unica funzione che soddisfa le 4 proprietà

(Det 1), (Det 2), (Det 3), (Det 4).

— o — o —

Conseguenze degli assiomi

Dim. Se sono dipendenti vuol dire che esiste $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ con i coeff. non tutti nulli.

Questo vuol dire che almeno un vettore lo posso scrivere come comb. lin. degli altri. Facciamo finta che sia v_1 :

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \text{Det}(a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, v_2, \dots, v_n) \\ &= a_2 \text{Det}(v_2, v_2, \dots, v_n) = 0 \\ &\quad + a_3 \text{Det}(v_3, v_2, \dots, v_n) = 0 \\ &\quad + \dots = 0 \end{aligned}$$

(in ogni riga ci sono 2 vettori uguali, quindi $\text{Det} = 0$).
— 0 — 0 —

Caso 2×2

$$v_1 = (a, b)$$

$$v_2 = (c, d)$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, v_2) &= \text{Det}(a e_1 + b e_2, c e_1 + d e_2) \\ &= a \text{Det}(e_1, c e_1 + d e_2) + b \text{Det}(e_2, c e_1 + d e_2) \\ &= \underbrace{ac \text{Det}(e_1, e_1)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 2) \\ 0}} + \underbrace{ad \text{Det}(e_1, e_2)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 1) \\ 1}} + \underbrace{bc \text{Det}(e_2, e_1)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 6) \\ -\text{Det}(e_1, e_2) \\ -1}} + \underbrace{bd \text{Det}(e_2, e_2)}_{\substack{\parallel (\text{Det } 2) \\ 0}} \end{aligned}$$

Conclusione: $\text{Det}(v_1, v_2) = ad - bc$

In termini di matrici

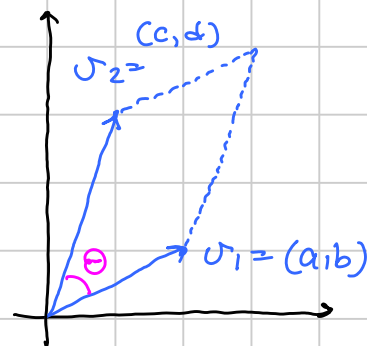
$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Interpretazione geometrica

$\text{Det}(v_1, v_2) =$ Area del parallelogrammo
dato dai vettori v_1 e v_2
(a meno del segno)

Dall'interpretazione geometrica è ovvio che

$\text{Det} = 0 \Leftrightarrow$ parallelogrammo è degenere
 $\Leftrightarrow v_1$ e v_2 sono lin. dip.



Dimostrazione dell'interpretazione geometrica

1° modo Scomporre il parallelogrammo in tanti rettangoli e triangoli

2° modo Area = lato · lato · $\sin \theta$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sin \theta$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \quad (\text{sviluppo i conti})$$

$$= \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|$$

Il segno del determinante è

- positivo se v_1 raggiunge v_2 ruotando in senso antiorario di un angolo $< 180^\circ$.
- negativo se la rotazione è oraria.

— o — o —