

Back to esercizio precedente

$$f(0, 1, 1) = (1, 2, 3)$$

$$f(1, -1, 0) = (1, 0, 1)$$

$$f(2, 2, 1) = (3, 3, 3)$$

4° modo Metodo RAPUANO

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Lavoro alla Gauss-Jordan fino ad avere l'Id nella 3×3 a sx.

A quel pto quello che ottengo a dx è la trasposta della matrice desiderata, cioè della matrice che rappresenta f dalla canonica alla canonica. Perché funziona?

Siano come prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora la matrice di partenza di Rapuano è $(M^t | A^t)$.

Ora lavorare alla GJ è equivalente a moltiplicare a sx per una certa R :

$$R (M^t | A^t) = (\underbrace{RM^t}_{Id} | RA^t)$$

Visto che è venuta l'identità $R = (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$, quindi a destra ci troviamo

$$RA^t = (M^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot M^{-1})^t$$

Quindi la trasposta della parte dx è proprio $A \cdot M^{-1}$ che è la matrice ottenuta prima con il metodo 3.

— o — o —

Proprietà della trasposta

- (1) $(A^t)^t = A$ per ogni matrice A
- (2) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$ per ogni A e B "compatibili"
- (3) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ per ogni matrice A quadrata e invertibile

Dim.

(1) Ovvio

(2) Basta scrivere la definizione di prodotto righe $\times$ colonne.

$$(A \cdot A^{-1}) = Id = (A^{-1} \cdot A)$$

Faccio il trasposto di tutto

$$\begin{array}{ccc} (A \cdot A^{-1})^t = Id^t = (A^{-1} \cdot A)^t \\ \downarrow (2) \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow (2) \\ \underbrace{(A^{-1})^t \cdot A^t} = Id = A^t \cdot \underbrace{(A^{-1})^t} \end{array} \rightarrow \text{questo dice che } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

— o — o —

Esercizio Consideriamo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (x+z, y-3z+2x)$$

Scrivere la matrice che rappresenta f usando in partenza la base $\{(1,0,1), (1,2,3), (3,3,1)\}$ e in arrivo la base $\{(2,3), (4,5)\}$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \quad \quad w_1 \quad w_2$

1° modo Calcolo $f(v_1)$ usando la formula

$f(v_1) = (2, -1)$ e lo scrivo come comb. lin. di w_1 e w_2 , cioè

$$(2, -1) = a(2, 3) + b(4, 5)$$

$\rightarrow$ trovo a e b e questi sono la 1ª colonna.

Procedo allo stesso modo con v_2 e v_3

$$\begin{array}{ccc} w_1 \rightarrow * & * & * \\ w_2 \rightarrow * & * & * \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array}$$

2° modo Dovrò cercare $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

e scrivo un sistema di 6 equazioni, ma ora non è chiaro quali (ad esempio calcolando f dei 3 vettori della base canonica)

3° modo Cambio di base.

Scrivo intanto f dalla canonica alla canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

Cosa fa A ?

Prende in input le componenti di $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla canonica e rende in output le comp. di $f(v) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla canonica di $\mathbb{R}^2$.

A me serve la matrice B che

- prende in INPUT le comp. di $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla $\{v_1, v_2, v_3\}$
- rende in OUTPUT " " " $f(v) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla $\{w_1, w_2\}$.

Serve un cambio in partenza ed un cambio in arrivo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La risposta è

$$B = N^{-1} A M$$

$\nwarrow \quad \uparrow \quad \swarrow$
canonica di $\mathbb{R}^2$ to $\{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ can $\mathbb{R}^3$ to can $\mathbb{R}^3$ dalla strana di $\mathbb{R}^3$ alla canonica di $\mathbb{R}^3$

Cosa fanno le 3 matrici?

- M prende in INPUT le comp. di $v \in \mathbb{R}^3$ risp. alla $\{v_1, v_2, v_3\}$ e rende in output le comp. dello stesso v risp. alla canonica di $\mathbb{R}^3$
- A prende in INPUT le comp. di $v \in \mathbb{R}^3$ risp. alla canonica e rende in output le comp. di $f(v)$ risp. alla canonica di $\mathbb{R}^2$
- N^{-1} prende in INPUT le comp. di $f(v)$ risp. alla canonica di $\mathbb{R}^2$ e rende in output le comp. di $f(v)$ risp. alla $\{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ consideriamo

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0 \}$$

$$V = \text{Span} \{ (1, 3, 5) \}$$

Dim. che $\mathbb{R}^3 = W \oplus V$ e scrivere la matrice che rappresenta (nella base canonica) la proiezione sulla componente W .

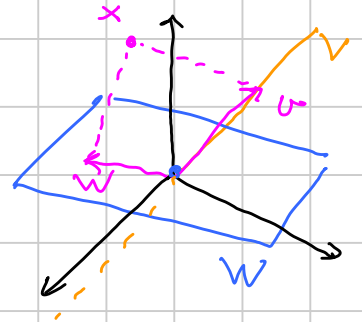
Ora W è un sottospazio di dim. 2, e una base è $\{(1,2,0), (1,0,-2)\}$.
 Il vettore $(1,3,5)$ è lin. indep. dai primi 2, quindi

$$V + W = \text{Span} \left\{ \underbrace{(1,2,0)}_{w_1}, \underbrace{(1,0,-2)}_{w_2}, \underbrace{(1,3,5)}_v \right\} = \mathbb{R}^3$$

Per Grassmann $\dim(V \cap W) = 0$, quindi la somma è diretta.

Una volta che la somma è diretta, ogni $x \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come $x = v + w$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $v \quad w$
 proiezione su W



Come calcolo la proiezione di un certo x risp. a W ?
 lo scrivo come $a(1,2,0) + b(1,0,-2) + c(1,3,5)$
 e salvo solo le prime 2 componenti.

Quindi è l'appl. lin. t.c.

$$f(w_1) = w_1$$

$$f(w_2) = w_2$$

$$f(v) = 0$$

$$\begin{matrix} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ v \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{dalla base } \{w_1, w_2, v\} \\ \text{alla stessa base} \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(w_1) \quad f(w_2) \quad f(v)$

Detta A questa matrice, se voglio dalla canonica alla canonica devo fare

$$M A M^{-1}$$

dove

strana $\leadsto$ can. canonica $\leadsto$ strana

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —