

Fatto generale Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori in uno spazio vett. V .

Supponiamo che v_1 sia comb. lin. degli altri, cioè

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Allora

$$\text{Span} \{v_1, \dots, v_n\} = \text{Span} \{v_2, \dots, v_n\}$$

Dim. Se $v \in \text{Span} \{v_2, \dots, v_n\}$, allora è ovvio che $v \in \text{Span} \{v_1, \dots, v_n\}$.
(basta usare coeff. o davanti a v_1).

Viceversa, se $v \in \text{Span} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, allora $v \in \text{Span} \{v_2, \dots, v_n\}$.

Infatti

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (\text{sostituisco } v_1)$$

$$= c_1 (a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

$$= (c_1 a_2 + c_2) v_2 + \dots + (c_1 a_n + c_n) v_n. \quad \square$$

Teorema (di sostituzione) Sia V uno sp. vett. e siano

- $\{v_1, \dots, v_m\}$ lin. indep.
- $\{w_1, \dots, w_n\}$ generatori.

Allora

(i) $m \leq n$

(ii) posso eliminare m dei w_k e sostituirli con tutti i v_k in modo da avere ancora generatori,

Dim. Dimostriamo per induzione su m .

Passo base : $m = 1$ $\{v_1\}$ lin. indep. ($v_1 \neq 0$)

$\{w_1, \dots, w_n\}$ generatori

Il fatto che $1 \leq n$ è ovvio. Devo far vedere che posso sostituire uno dei w_k con v_1 . Essendo i w generatori, posso scrivere

$$v_1 = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$$

Almeno uno dei coeff. è $\neq 0$. A meno di cambiare i nomi possiamo supporre $c_1 \neq 0$. Dico che $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori. Infatti

$$\text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \text{Span}\{v_1, \cancel{w_1}, w_2, \dots, w_n\} \\ = \text{Span}\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$$

Ho usato il fatto generale in quanto w_1 è comb. lin. degli altri:

$$w_1 = \frac{1}{c_1} v_1 - \frac{c_2}{c_1} w_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1} w_n$$

↑
corretto dopo video

Passo induttivo Se è vero per un certo n , allora è vero anche per $n+1$.

Ora abbiamo

$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ lin. indep.

$\{w_1, \dots, w_n\}$ generatori.

Oss.: $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono ancora lin. indep., quindi per ipotesi induttiva $m \leq n$ e posso sostituire m dei w_k con i primi v_k . A meno di cambiare i nomi ottengo che

$\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori.

Mi resta ancora v_{m+1} che vorrei andare a sostituire qui sopra.

Prima domanda: è rimasto qualcuno dei w originali?

Sì, perché altrimenti $\{v_1, \dots, v_m\}$ sarebbero generatori, ma allora v_{m+1} sarebbe comb. lin. di questi, cosa non possibile in quanto $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ erano lin. indep.

Quindi è rimasto almeno un w_k per cui $m+1 \leq n$.

Devo fare l'ultima sostituzione. Scrivo v_{m+1} come comb. lin. dei generatori:

$$v_{m+1} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + c_{m+1} w_{m+1} + \dots + c_n w_n$$

e dico che uno almeno dei coeff. c_k è $\neq 0$. Se fossero tutti 0, vorrebbe dire che v_{m+1} è comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ che non è vero.

A meno di cambiare i nomi sia $w_{m+1} \neq 0$, e allora posso sostituire w_{m+1} con v_{m+1} . Infatti

$$\text{Span} \{ v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n \} = \text{Span} \{ v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \cancel{w_{m+1}}, \dots, w_m \} \\ = \text{Span} \{ v_1, \dots, v_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n \}. \quad \square$$

Esercizio 1 Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(0,1,1) = (1,2,3)$$

$$f(1,-1,0) = (1,0,1)$$

$$f(2,2,1) = (3,3,3)$$

Determinare se esiste unica l'applic. con queste proprietà e det. la matrice che la rappresenta usando in partenza ed arrivo la base canonica.

Per la parte esistenza/unicità, usiamo il teo. di struttura. Ci basta verificare che $B = \{(0,1,1), (1,-1,0), (2,2,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Per fare questo lavoriamo alla Gauss la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e se vengono 3 PIVOT siamo a posto.}$$

Come ottengo la matrice?

1° modo Uso sostanzialmente la definizione. Siano e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica.

Come calcolo $f(e_1) = f(1,0,0)$?

Scrivo $(1,0,0)$ come comb. lin. dei 3 vettori dati

$$(1,0,0) = a(0,1,1) + b(1,-1,0) + c(2,2,1)$$

e a quel p.to trovo a, b, c risolvendo il sistema e infine calcolo

$$\begin{array}{rcccl} e_1 & \rightarrow & * & * & * \\ e_2 & \rightarrow & * & * & * \\ e_3 & \rightarrow & * & * & * \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$

$$f(1,0,0) = a f(0,1,1) + b f(1,-1,0) + c f(2,2,1)$$

2° modo Metodo barino. La matrice sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Impongo ora le 3 condizioni

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b + c = 1$$

$$e + f = 2$$

$$h + i = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = 1$$

$$d - e = 0$$

$$g - h = 1$$

...

...

Così facendo ottengo un sistema di 8 equazioni in 9 incognite. Risolvendolo trovo la matrice.

3° modo Cambio di base...

Considero la matrice

$$\begin{matrix} e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

$$B = \{ \overset{v_1}{(0, 1, 1)}, \overset{v_2}{(1, -1, 0)}, \overset{v_3}{(2, 2, 1)} \}$$

$$C = \{ e_1, e_2, e_3 \}$$

La matrice A rappresenta f usando in partenza la base B, in arrivo la base canonica. Mi serve la matrice che cambi dalla canonica alla B

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa cambia base dalla B alla canonica.

Quindi quella che mi serve è M^{-1} .

Concludendo quello che cerco è

$$A \cdot M^{-1}$$

↑
cambio di base
in partenza

Cosa fa tutto ciò. Se in INPUT metto un vettore colonna che rappresenta comp. rispetto alla canonica, con M^{-1} ottengo la comp. dello stesso vettore risp. alla base $\mathcal{B}$, poi con A ottengo la comp. di f del vettore rispetto alla canonica, che è quello che volevo.

— o — o —