

MATRICE INVERSA

Problema: data una matrice A $n \times n$, trovare (se esiste) una matrice B $n \times n$ tale che

$$AB = BA = I$$

↑ matrice identica $n \times n$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sottoproblemi: (1) come capisco se B esiste?

(2) eventualmente, come calcolo B .

Risposta a (1): esiste la matrice inversa se e solo se vista come applic. lineare è bigettiva.

Essendo dim. in partenza e arrivo uguali, si ha bigettiva $\Leftrightarrow$ suriettiva $\Leftrightarrow$ dim (ker) = 0

cioè se e solo se il sistema $Ax = 0$ ha solo la soluzione banale $x = 0$

cioè se e solo se lavorando a la Gauss ritrovo i pivot su ogni colonna. $\square$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

3 pivot $\Rightarrow$ esiste la matrice inversa

Come la calcolo?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 5 & -2 & +8 \\ 0 & 100 & 0 & -20 & 28 & -12 \\ 0 & 0 & 25 & 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} & \frac{8}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{25} & -\frac{3}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{25} & -\frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -5 & 7 & -3 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Verifica (che avrebbe fatto) : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Riassumendo : per fare l'inversa di A , parto da $(A | Id)$ e lavoro alla Gauss-Jordan fino ad avere $(Id | B)$. Quella B è l'inversa di A .

Casi particolari 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \leftarrow \text{provare per credere}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ \cancel{cd}-\cancel{cd} & -bc+ad \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Quando divido per } ad-bc \\ \text{trovo proprio l'identità } 2 \times 2 \end{matrix}$$

Perché questo sistema funziona?

① Data una qualunque matrice M , fare un passaggio alla Gauss è come moltiplicare M a sx per una certa matrice R .

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Fare $2^a - 2 \cdot 1^a$ equivale a moltiplicare per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ copia la 1^a riga
 $\leftarrow 2^a - 2 \cdot 1^a$
 $\uparrow$ copia la 3^a riga

- ② La lavorata alla Gauss generale è come moltiplicare a sx per una matrice unica

$$\boxed{R_1 \dots R_3 R_2 R_1} M = R \cdot M$$

$\uparrow$ 1° pass.
 $\uparrow$ 2° pass.

è come se avessi moltiplicato una volta sola per R

③ $C \cdot (D | E) = (CD | CE)$ (automatico dal prodotto righe per colonne)

$\uparrow$ $n \times n$ $\uparrow$ $n \times n$ $\uparrow$ $n \times n$

- ④ Sono partito da $(A | I)$ e lavorando alla Gauss, cioè moltip. a sx per una certa R, cosa trovo

$$R(A | I) = (RA | R)$$

se qui trovo Id, allora vuol dire che $R = A^{-1}$, e la ritrovo

— o — o —

Matrici inverse e cambi di base

Esempio Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ la base canonica : $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 2, 3), (0, 4, 1), (2, 1, -1)\}$.

Perché so che è una base?

Dalla matrice so che sono lin. indep., quindi essendo il numero giusto sono una base. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M \quad \text{è il cambio di base dalla } \{v_1, v_2, v_3\} \text{ alla canonica}$$

$\uparrow$ v_1 $\uparrow$ v_2 $\uparrow$ v_3 nella canonica

cioè prende in INPUT componenti rispetto alla base nuova e restituisce in OUTPUT componenti rispetto alla canonica

Cioè: il vettore $5v_1 + 7v_2 - 3v_3$ cosa diventa nella canonica?

$$M \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se voglio fare l'operazione inversa, cioè passare dalle comp. rispetto alla canonica a quelle rispetto alla base nuova, allora devo usare la matrice M^{-1}

M : dalla nuova alla canonica, quindi

M^{-1} : dalla canonica alla nuova.
— o — o —

Esempio $v_1 = (2, 3)$ $v_2 = (1, 2)$ $\rightarrow$ sono una base
 $w_1 = (1, -1)$ $w_2 = (3, 1)$ $\rightarrow$ sono una base

Voglio passare dalla w_1, w_2 alla v_1, v_2

$$\{w_1, w_2\} \rightsquigarrow \text{canonica} \rightsquigarrow \{v_1, v_2\}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Per fare le cose nel verso giusto devo scrivere

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{Dalla base } w \text{ alla base } v$$

Cosa vuol dire questo? $3w_1 + 2w_2 = 19v_1 - 29v_2$
 $(3, -3) + (6, 2) \quad (38, 57) - (29, 58)$
 $(9, -1) \quad (9, -1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -29 \end{pmatrix}$$