

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 20

Titolo nota

29/10/2014

Relazioni tra sistemi lineari, Ker, Im.

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}^3$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (2x + z, y - z, 2x - 2y + 3z)$$

Si verifica facilmente che f è lineare.

Classico: calcolare dim e basi di $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$.

Per trovare $\ker(f)$ cerco i vettori (x, y, z) t.c. $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = t, \quad y = z = t, \quad 2x = -z = -t \Rightarrow x = -\frac{1}{2}t$$

$$\text{Sol. sistema } (x, y, z) = t \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$\text{Quindi } \dim(\ker(f)) = 1 \text{ e } \ker(f) = \text{Span}\left\{\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)\right\} = \text{Span}\{(-1, 2, 2)\}.$$

Per il teorema della dimensione sappiamo che $\dim(\text{Im}(f)) = 2 = 3 - 1$.

Resta da trovare una base dell'immagine.

Prendo in partenza la base canonica e_1, e_2, e_3 . Allora $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sono generatori di $\text{Im}(f)$, cioè

$$\text{Im}(f) = \text{Span}\{(2, 0, 2), (0, 1, -2), (1, -1, 3)\}$$

non possono essere lin. indip.

In questo caso una base di $\text{Im}(f)$ è costituita da 2 elementi lin. indip., ad esempio i primi 2: $\{(2, 0, 2), (0, 1, -2)\}$

sono lin. ind. perché non sono uno multiplo dell'altro
Essendo in uno sp. di dim 2 per forza sono una base

Sistemi lineari

Un sistema di m equazioni in n incognite si può sempre scrivere nella forma

$$A x = b$$

matrice $m \times n$ vettore colonna lungo n vettore colonna lungo m

La matrice A la posso pensare come appl. lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che prende in INPUT cose lunghe n e restituisce in OUTPUT cose lunghe m .

Il sistema è **omogeneo** se $b=0$. In questo caso risolvere il sistema $Ax=0$ vuol dire trovare il $\ker$ di f . In particolare l'insieme delle sol. di un sist. lin. omogeneo è uno sp. vett. (la somma di 2 sol. è ancora sol.; i multipli di una sol. sono ancora sol.). Se $n > m$, allora $\dim \text{partenza} > \dim \text{arrivo}$, quindi di sicuro $\dim(\ker) \geq 1$, quindi ci sono soluzioni oltre quella banale $x=0$.

Un sistema **non omogeneo** può avere o non avere soluzioni.

Le soluzioni esistono se e solo se $b \in \text{Im}(f)$.

Ad esempio, se $n < m$, allora non si può avere surgettività, quindi ci sono dei valori di b per cui il sistema non ha soluzioni. Quando le soluzioni ci sono, sono date dalla formula

$$x = x_0 + v$$

soluzione qualunque soluzione del corrispondente sistema omogeneo

- Voglio risolvere $Ax = b$
- Suppongo di aver trovato una soluzione x_0 (quindi $Ax_0 = b$)
- Come sono fatte TUTTE le altre soluzioni?

Risposta: si ottengono facendo $x_0 + \text{sol. del sistema omogeneo } Ax=0$.

Dim. Sia x una soluzione qualunque, cioè $Ax = b$
 Ma allora $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$
 cioè $x - x_0$ risolve il sistema omogeneo

$$x = x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{\text{sol. sist. omog.}}$$

Viceversa se $Ax_0 = b$ e $Av = 0$, allora
 $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b$,
 cioè $x_0 + v$ risolve il non omogeneo. $\square$

Esempio $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3y - 5z = 5 \end{cases}$

$$z = t, \quad 3y = 5 + 5z = 5 + 5t, \quad y = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}t$$

$$2x = 5 + 3z - y = 5 + 3t - \frac{5}{3} - \frac{5}{3}t = \frac{10}{3} + \frac{4}{3}t \quad x = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}t$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}t, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}t, t \right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) + t \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right)}_{x_0 = \text{sol. sist. non omog.}} + t \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right)}_{\text{generico elemento del ker, cioè soluzione di } Ax = 0}$$

generico elemento
del ker, cioè
soluzione di $Ax = 0$

Analogamente potrei scrivere

$$(x, y, z) = \underbrace{(1, 0, -1)}_{\text{sol. di } Ax = b \text{ che si vede a occhio}} + t \underbrace{(2, 5, 3)}_{\text{base di ker}}$$

sol. generica
di $Ax = 0$

— o — o —