

KER E IMMAGINE DI UNA APPL. LIN.

Siano V e W sp. vettoriali. Sia $f: V \rightarrow W$ un'appl. lineare.

Def. Si dice $\ker(f)$ (nucleo di f) l'insieme

$$\ker(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \quad (\text{vettori in partenza che vanno in } 0)$$

Def. Si dice $\text{Im}(f)$ (immagine di f) l'insieme

$$\text{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \} \quad (\text{tutti i vettori in arrivo che sono immagine di qualcosa})$$

Oss. $\ker(f) \subseteq V$, $\text{Im}(f) \subseteq W$

Teorema (1) $\ker(f)$ è un s.sp. vett. di V
 (2) $\text{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W

Dim. (1) Devo fare 2 verifiche

• somma: dati $v_1 \in \ker(f)$ e $v_2 \in \ker$, è vero che $v_1 + v_2 \in \ker$?

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ v_1, v_2 \in \ker(f)}}{=} 0 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker(f)$$

• prodotto: dato $v \in \ker(f)$, dato $\alpha \in \mathbb{K}$, allora $\alpha v \in \ker(f)$ poiché

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ v \in \ker(f)}}{=} \alpha \cdot 0 = 0$$

(2) Se $w_1 \in \text{Im}(f)$ cioè $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 \in \text{Im}(f)$ cioè $w_2 = f(v_2)$, allora

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im}(f)$$

Analogamente per il prodotto: se $w \in \text{Im}(f)$ cioè $w = f(v)$, allora $\alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \text{Im}(f)$. $\square$

Osservazione Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di V .

Allora $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ sono generatori di $\text{Im}(f)$, cioè

$$\text{Im}(f) = \text{Span}(\{f(v_1), \dots, f(v_m)\})$$

Dim. Prendo un qualunque $w \in \text{Im}(f)$. Allora esiste almeno un $v \in V$ t.c. $f(v) = w$. Scrivo v come comb. lin. degli el. della base

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n). \end{aligned}$$

Quindi w è comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$.

Ovviamente vale anche il viceversa, cioè ogni comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sta in $\text{Im}(f)$. $\square$

Fatto generale Siano v_1 e v_2 in V tali che $f(v_1) = f(v_2)$.

Allora $v_1 - v_2 \in \ker(f)$

$$[\text{Dim.: } f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0]$$

Teorema Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{0\}$

Dim. Se è iniettiva, è ovvio che solo 0 può andare in 0.

Viceversa, supponiamo che $\ker(f) = \{0\}$ e dimostriamo l'iniettività.

Prendiamo v_1 e v_2 t.c. $f(v_1) = f(v_2)$.

Per quanto detto sopra si ha $v_1 - v_2 \in \ker(f)$, quindi $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$. $\square$

Teorema (della dimensione) (RANK-NULLITY)

Sia $f: V \rightarrow W$ un'applic. lineare.

Allora

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V)$$

Dim. Prendo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$ ($k = \dim(\ker)$).

Allora i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip. in V .

Ma allora posso aggiungere vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ in modo che

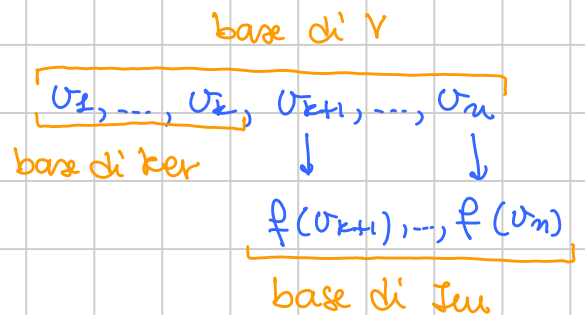
$v_1, \dots, v_n$ siano una base di V ($n = \dim(V)$).

Dico che $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono una base di $\operatorname{Im}(f)$.

Se lo dimostro ho finito perchè sono $n-k$.

Quindi devo dim. due cose

- $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono lin. indip.
- $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im}(f)$.



Verifico che generano: ogni elemento $w \in \operatorname{Im}(f)$ è comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ per quanto visto precedentemente, cioè

$$w = \underbrace{c_1 f(v_1) + \dots + c_k f(v_k)}_0 + c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_n f(v_n)$$

quindi w è in realtà comb. lin. di $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$.

Verifico che sono lin. indip. Prendo una loro comb. lin. che fa 0:

$$c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_n f(v_n) = 0, \text{ cioè}$$

$$f(c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n) = 0, \text{ cioè}$$

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n \in \ker(f)$$

quindi è comb. lineare dei primi $v_1, \dots, v_k$, quindi

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

Portando tutto a sx ottengo una comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ che fa 0, ma essendo lin. indip. tutti i coeff. devono essere 0, cioè in part.

$$c_{k+1} = \dots = c_n = 0. \quad \square$$

Conseguenza 1 Se $\dim(W) > \dim(V)$, allora f non può essere surgettiva.

Infatti $\dim(\ker) + \dim(\text{Im}) = \dim(V)$
↑
se fosse surgettiva sarebbe uguale a $\dim(W)$ e non si potrebbe avere uguaglianza

In generale si ha comunque che

$$\dim(\text{Im}) \leq \dim(W)$$

Conseguenza 2 Se $\dim(V) > \dim(W)$, allora f non può essere iniettiva

Infatti $\dim(\ker) + \dim(\text{Im}) = \dim(V)$, da cui

$$\dim(\ker) = \dim(V) - \dim(\text{Im}) \geq \dim(V) - \dim(W)$$

$$\dim(\text{Im}) \leq \dim(W)$$

VALE
SEMPRE

Quindi se $\dim(V) > \dim(W)$, allora $\dim(\ker) \geq 1$, quindi il $\ker(f)$ non contiene solo lo zero, quindi f NON è iniettiva.

Conseguenza 3 Se $\dim(V) = \dim(W)$, allora

f è iniettiva se e solo se f è surgettiva

Dim. $\dim(\ker) + \dim(\text{Im}) = \dim(V) [= \dim(W)]$

Iniettiva $\Rightarrow \dim(\ker) = 0 \Rightarrow \dim(\text{Im}) = \dim(W) \Rightarrow \text{Im} = W \Rightarrow$ surg.

Surgettiva $\Rightarrow \text{Im} = W \Rightarrow \dim(\text{Im}) = \dim(W) = \dim(V) \Rightarrow \dim(\ker) = 0$
 $\Rightarrow \ker = \{0\} \Rightarrow f$ è iniettiva. $\square$