

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e W due spazi vettoriali.

Un'applicazione lineare è una funzione $f: V \rightarrow W$ tale che

$$(i) \quad f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u \in V, \forall v \in V$$

$$(ii) \quad f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in K$$

Esempio classico La derivata è un'applicazione lineare perché

- la derivata della somma è la somma delle derivate
- la derivata di α volte una funzione è α derivata funzione.

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}$ Come sono fatte tutte le funzioni lineari $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Posto $k = f(1)$, allora $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = kx$.

Quindi tutte le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineari sono del tipo $f(x) = kx$ (il grafico è una retta per l'origine).

Oss. Se $f: V \rightarrow W$ è lineare, allora $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

$$[\text{Infatti } f(\alpha u + \beta v) = \underset{\substack{\uparrow \\ (i)}}{f(\alpha u)} + \underset{\substack{\uparrow \\ (ii)}}{f(\beta v)} = \alpha f(u) + \beta f(v)]$$

Più in generale "le combinazioni lineari escono fuori da f ", cioè

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$$

Esempio 2 Come sono fatte tutte le $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineari.

Risposta: sono del tipo $f(x, y) = kx + ry$

[Posto $f(1, 0) = k$ e $f(0, 1) = r$, avremo che

$$f(x, y) = f(x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)) = x f(1, 0) + y f(0, 1) = kx + ry]$$

Teorema (Struttura delle applicazioni lineari)

Siano V e W due spazi vettoriali. Sia V di dimensione finita, e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ vettori qualunque di W (non è detto che siano generatori e/o lin. indip.).

Allora esiste un'unica funzione lineare

$$f: V \rightarrow W$$

tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Brutalmente: posso scegliere dove mandare una qualunque base dello spazio di partenza. A quel punto la funzione è fissata ovunque.

Dim.: Un qualunque $v \in V$ lo posso scrivere come comb. lin.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n. \end{aligned}$$

A rigor di logica, dovrei verificare che la funzione così definita è lineare, ma è una verifica semplice una volta capito cosa c'è da fare. Si tratta di verificare (i) e (ii), cioè

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u). \quad \square$$

Esempio Dimostrare che esiste un'unica funzione lin. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

tale che

$$f(\overset{v_1}{1}, \overset{v_1}{0}, \overset{v_1}{1}) = (\overset{w_1}{2}, \overset{w_1}{3}) \quad , \quad f(\overset{v_2}{1}, \overset{v_2}{1}, \overset{v_2}{0}) = (\overset{w_2}{1}, \overset{w_2}{0}) \quad , \quad f(\overset{v_3}{0}, \overset{v_3}{1}, \overset{v_3}{2}) = (\overset{w_3}{1}, \overset{w_3}{4}).$$

Calcolare $f(1, 1, 1)$.

Per il teo. di struttura basta verificare che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$, il che si riduce a lavorare alla Gauss la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} \end{pmatrix} \quad \text{Ok, sono base}$$

Fatto generale Quando metto dei vettori in colonna, il numero di PIVOT è la dimensione dello Span di quei vettori, cioè del sottospazio che essi generano.

Per calcolare $f(1,1,1)$ devo scrivere $(1,1,1)$ come comb. lin. di v_1, v_2, v_3 , cioè risolvere

$$(1,1,1) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,2)$$

che si riduce a risolvere un sistema. A quel p.to

$$f(1,1,1) = x f(v_1) + y f(v_2) + z f(v_3)$$

$$= x w_1 + y w_2 + z w_3.$$

$$\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ --- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita ($\dim V = n$, $\dim W = m$)

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W .

Si dice matrice associata ad f (rispetto alle basi date) la matrice così costruita.

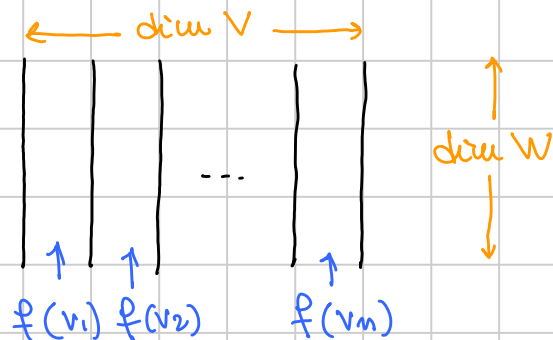
$$\text{Sia } f(v_1) = \boxed{a_{1,1}} w_1 + \boxed{a_{2,1}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}} w_m$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 1ª colonna della matrice

$$f(v_2) = \boxed{a_{1,2}} w_1 + \boxed{a_{2,2}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m,2}} w_m$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 2ª colonna della matrice

Procedendo così ottengo una matrice $m \times n$



Detta A la matrice associata ad f , come calcolo $f(v)$ per un qualunque vettore $v \in V$?

Basta:

- scrivo v come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ ottenendo così n numeri (i coeff.)
- questi n numeri li penso come un vettore colonna x
- moltiplico il vettore per la matrice, cioè calcolo Ax , ottenendo un vettore colonna di lunghezza m
- gli m numeri nel vettore colonna sono i coeff. di $f(v)$ rispetto alla base $w_1, \dots, w_m$.

Esempio $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

$$f(1,0,0) = (2,3) \quad f(0,0,1) = (3,4) \quad f(1,1,0) = (2,5)$$

Intanto esiste unica $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con queste proprietà perché i 3 vettori in parentesi sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Voglio scrivere la matrice di f usando in partenza la base canonica ed in arrivo la base canonica,

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0) & v_2 &= (0,1,0) & v_3 &= (0,0,1) \\ w_1 &= (1,0) & w_2 &= (0,1) \end{aligned}$$

$$f(v_1) = (2,3) = \boxed{2}w_1 + \boxed{3}w_2$$

$$\begin{aligned} f(v_2) &= f(0,1,0) = f((1,1,0) - (1,0,0)) \\ &= f(1,1,0) - f(1,0,0) = (0,2) \end{aligned}$$

$$f(v_3) = (3,4) = \boxed{3}w_1 + \boxed{4}w_2 = \boxed{0}w_1 + \boxed{2}w_2$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{3} \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

Quanto fa $f(7, 9, -1)$?

Risposta: $(7, 9, -1) = 7 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 35 \end{pmatrix}$$

sono le componenti di $f(7, 9, -1)$
rispetto alla base canonica in arrivo

Conclusione $f(7, 9, -1) = (11, 35) = 11 \cdot w_1 + 35 \cdot w_2$

— 0 — 0 —