

Achtung! Due vettori sono lin. dip. se e solo se sono uno multiplo dell'altro ($av+bw=0 \Leftrightarrow v = -\frac{b}{a}w$ posto di poter dividere)
Con tre o più vettori non vale (devo impostare il sistema lineare).

Sottospazi $\rightarrow$ descrizione cartesiana (equazioni)
 $\rightarrow$ descrizione parametrica (Span)

- ① Capire se q.c. è un sottospazio
- ② Passare da una descrizione all'altra
- ③ Calcolare dim. e basi
- ④ Saper trovare somme e intersezioni

Esempio 1 $X = \mathbb{R}^4$

$$V = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w, x = 3z \} \rightarrow \text{cartesiana}$$

$$W = \text{Span} \{ (1, 0, 3, 1), (1, 0, 3, -2) \} \rightarrow \text{descrizione param.}$$

Calcolare dim. e basi di $V, W, V+W, V \cap W$.

(1) W è un sottospazio (tutti gli Span lo sono) e ha dim. 2 (quelli dati sono 2 vett. lin. indip.)

(2) Come verifico che V è un sottospazio?

Devo fare 2 verifiche

Somma Prendo 2 elementi $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in V$ e $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in V$

Poiché stanno in V si avrà che

$$x_1 + y_1 = z_1 + w_1 \quad x_1 = 3z_1 \quad (*)$$

$$x_2 + y_2 = z_2 + w_2 \quad x_2 = 3z_2 \quad (**)$$

Devo verificare che $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) \in V$, cioè le sue componenti verificano le stesse equazioni

$$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = (z_1+z_2) + (w_1+w_2)$$

$$(x_1+x_2) = 3(z_1+z_2)$$

E queste seguono sommando quelle date (*) e (**).

Prodotto: stessa cosa.

(3) Una volta che è un sottospazio, come trovo dim. e base di V ?

Risolve il sistema che descrive V

$$\begin{cases} x+y = z+w \\ x = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ y+2z-w=0 \end{cases}$$

Le variabili z e w sono libere

$$z = t, \quad w = s, \quad y = w - 2z = s - 2t$$

$$x = z + w - y = t + s - s + 2t = 3t$$

$$(x, y, z, w) = (3t, s-2t, t, s) =$$

$$= t(3, -2, 1, 0) + s(0, 1, 0, 1)$$

Quindi $\dim V = 2$ e una base è quella di sopra, cioè

$$V = \text{Span} \{ (3, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \}$$

(4) Voglio dim. e base di $V+W$. Provo a vedere se i 4 vettori (i 2 che generano V e i 2 che generano W) sono lin. indip.

Se lo sono, la dim. è 4 e ho finito.

Come verifico che sono lin. indip.? Risolve il solito sistema, che si riduce a lavorare alla Gauss sulla matrice che ha i 4 vettori come colonne

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se ottengo 4 PIVOT, posso concludere che $\dim(V+W) = 4$,
quindi $\dim(V \cap W) = 0$ (Grassmann)
quindi $V \cap W = \{0\}$
quindi la somma è diretta.

(5) Se so che la somma è diretta, come determino le componenti di un certo vettore, per esempio di $(2, 1, 1, 3)$?
Detto altrimenti, come scrivo $(2, 1, 1, 3) = v + w$
con $v \in V$ e $w \in W$?

Risolvere il sistema

$$x(3, -2, 1, 0) + y(0, 1, 0, 1) + z(1, 0, 3, 1) + w(1, 0, 3, -2) = (2, 1, 1, 3)$$

Sono sicuro che ha soluz. unica perché i 4 vettori sono una base di $\mathbb{R}^4$.

A questo punto

→ la somma dei primi 2 pezzi è la comp. risp. a V

→ " " degli ultimi " " " " " " " " W ,
— 0 — 0 —

Esempio 2 $X = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \text{pol. di grado } \leq 3$.

$V = \{p(x) \in X : p(5) = 3\}$ è un sottospazio?

NO! Se prendo due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ t.c. $p_1(5) = 3$ e $p_2(5) = 3$,
la loro somma verifica $p_1(5) + p_2(5) = 6 \neq 3$, quindi
non va bene.

$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(5) = 0\}$ è un sottospazio? SÌ!

Come calcolo dim. e base?

Il generico polinomio è $a + bx + cx^2 + dx^3 = p(x)$

Impongo la condizione

$$a + 5b + 25c + 125d = 0$$

Ho 3 parametri liberi:

$$d = t \quad c = s \quad b = u \quad a = -5u - 25s - 125t$$

quindi

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (-5u - 25s - 125t, u, s, t) \\ &= t(-125, 0, 0, 1) + s(-25, 0, 1, 0) + u(-5, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Quindi $\dim V = 3$ e una base è

$$\left. \begin{array}{l} -125 + x^3 \\ -25 + x^2 \\ -5 + x \end{array} \right\} \text{polinomi ricostruiti a partire da } (a, b, c, d)$$

↑ 3 elementi di V linearmente indipendenti.
— 0 — 0 —

Esempio 3 $X = M_{2 \times 2}$ $V = \{ A \in M_{2 \times 2} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

è un s.sp. vettoriale? NO!

Prendo 2 matrici A_1 e A_2 che verificano la proprietà

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ che non va bene, quindi non è s.sp.

$V = \{ A \in M_{2 \times 2} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è un s.sp. vett.

Vediamo la dim. e una base $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
e impongo la condizione

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ho così il sistema $\begin{cases} a+2b = 0 \\ c+2d = 0 \end{cases}$

Le variabili libere sono (per esempio) b e d

$$b = t, \quad d = s, \quad c = -2s, \quad a = -2t$$

$$\text{Quindi } (a, b, c, d) = (-2t, t, -2s, s)$$

$$= t(-2, 1, 0, 0) + s(0, 0, -2, 1)$$

Quindi $\dim V = 2$ e una base è

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 4 $W = \text{Span} \{ (1, 0, 3, 1), (1, 0, 3, -2) \}$ in $\mathbb{R}^4$

Voglio scrivere una rappresentazione cartesiana.

Saranno eq. del tipo $ax + by + cz + dw = 0$

Sostituisco $(x, y, z, w) =$ i 2 vettori dati

$$\begin{cases} a + 3c + d = 0 \\ a + 3c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c + d = 0 \\ 3d = 0 \end{cases}$$

Le incognite sono 4: a, b, c, d . Le variabili libere sono b e c .

Quindi

$$b = t, \quad c = s, \quad d = 0, \quad a = -3s$$

$$(a, b, c, d) = (-3s, t, s, 0) = t(0, 1, 0, 0) + s(-3, 0, 1, 0)$$

Quindi 2 possibili eq. sono

$$\rightarrow t=0, s=1 \quad \rightsquigarrow \quad -3x + z = 0$$

$$\rightarrow t=1, s=0 \quad \rightsquigarrow \quad y = 0$$

Conclusione $W = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y=0, z=3x \}$

Oss. Quando si vanno ad intersecare gli spazi è equivalente a mettere a sistema le cartesiane.

— o — o —