

Riassunto delle def.

- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di uno spazio vett. V se ogni $v \in V$ si scrive come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.
- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indep. se
$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$
- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se sono generatori e sono lin. indep.

Teorema (esistenza di una base)

Sia V uno sp. vettoriale. Supponiamo che V ammetta un numero finito di generatori.

Allora per forza in V esiste almeno una base.

Teorema (Proprietà delle basi)

Sia V uno sp. vett. in cui esiste un numero finito di generatori.

Allora :

- (1) tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi (questo numero si dice dimensione dello spazio vettoriale),
- (2) dato un insieme di generatori, posso sempre ottenere una base eliminando alcuni elementi,
- (3) dato un insieme di vettori lin. indep., posso sempre ottenere una base aggiungendo un po' di elementi,
- (4) se $\dim V = n$ e ho un insieme di n generatori, allora questi sono per forza una base,
- (5) se $\dim V = n$ e ho un insieme di n vettori lin. indep., allora questi sono per forza una base.

Lemma fondamentale (lemma di sostituzione)

Sia V uno spazio vettoriale.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori lin. indep.

Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ un insieme di generatori.

Allora

(i) $n \leq m$

(ii) Posso sostituire n elementi dei w_k , diciamo $w_1, \dots, w_n$ con $v_1, \dots, v_n$ in modo tale che $\{v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m\}$ siano ancora generatori.

— o — o —

Dim. teo. esistenza base Per ipotesi ho che $v_1, \dots, v_n$ generano V .

Considero tutti i possibili sottoinsiemi di $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Alcuni di questi saranno ancora generatori. Tra tutti quelli che sono generatori scelgo quello (o uno qualunque di quelli) che ha il minor numero di elementi. Dico che questo sottoinsieme è una base.

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ questo sottoinsieme (ho cambiato la numerazione).

È ovvio che sono generatori.

Devo dim. che sono lin. indep. Supponiamo per assurdo che non lo siano. Allora esiste una comb. lin.

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$$

con i coeff. non tutti nulli. A meno di cambiare i nomi sia $c_1 \neq 0$.

Ma allora

$$v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1} v_k$$

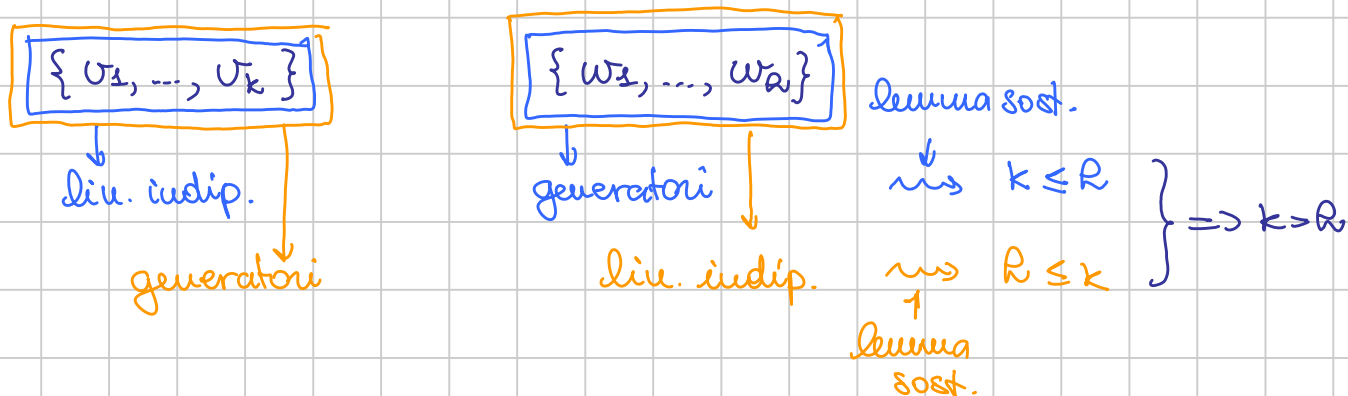
Ma allora dico che $\{v_2, \dots, v_k\}$ sono ancora generatori perché qualunque cosa che posso scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$ la posso scrivere anche usando solo $v_2, \dots, v_k$.

Ho così trovato un insieme di gen. con meno di k elementi, che è assurdo.

— o — o —

Dim. te. proprietà (Dando per buono il lemma di sostituzione)

(1) Prendo 2 basi qualunque



(2) Dim. nel teorema precedente. Posso sempre ottenere una base a partire da un sistema di generatori prendendo il + piccolo sottoinsieme che continua a generare.

(3) Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ un insieme lin. indep.

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base.

Per il lemma di sost. ho che $m \leq n$ e posso sostituire un po' dei w_k con $v_1, \dots, v_m$ ottenendo ancora dei generatori.

Quindi $\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori (ho supposto di aver sostituito i primi m). Dico che questa è una base. Infatti sono n elementi e generano. Se non fossero una base vorrebbe dire che una base ha meno di n elementi.

(4) Tutte le basi hanno n elementi. Se avessi n el. che non sono una base, per il p.to (2) potrei avere una base eliminando qualcuno, ma allora ci sarebbe una base con meno di n elem.

(5) Tutte le basi hanno n elementi. Se avessi n el. che sono lin. indep. e non sono una base, per il p.to (3) potrei ottenere una base aggiungendo roba (vettori), ma allora avrei una base con più di n elementi.

Esempio 1 Dim. che in $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1,2,1)$, $(0,2,1)$, $(1,1,0)$ sono una base.

Se uso la definizione dovrei fare 2 verifiche:

→ che sono lin. indip.

→ che sono generatori.

Sapendo già che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, basta verificare una qualunque delle due proprietà.

La più semplice è la lineare indipendenza: impongo

$$x(1,2,1) + y(0,2,1) + z(1,1,0) = (0,0,0)$$

e spero di ottenere $x=y=z=0$. (Per essere generatori al posto di $(0,0,0)$ dovrei mettere il generico vettore (A,B,C) e sperare di avere sempre soluzioni).

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ 2x + 2y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Le colonne della parte coeff. hanno il PIVOT, quindi l'unica sol. è $x=y=z=0$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 Verificare se $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

sono una base di $M_{2 \times 2}$.

Sapendo già che $\dim(M_{2 \times 2}) = 4$ basta verificare la lineare indipendenza

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - z + w = 0 \\ 3y = 0 \\ x + y + w = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ora dovrai lavorare alla Gauss e vedere se ogni colonna della parte coeff. si ritrova il PIVOT.

— 0 — 0 —