

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 13

Titolo nota

15/10/2014

Teorema Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V (stiamo supponendo che esista una base con un numero finito di elementi).

Allora ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli el. della base, cioè esistono unici $c_1, \dots, c_n$ in $\mathbb{K}$ t.c.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

Def. I numeri $c_1, \dots, c_n$ si dicono **COMPONENTI** di v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$.

Dim. Che esistano $c_1, \dots, c_n$ segue dal fatto che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori.

Devo dim. che sono unici. Supponiamo che ce ne siano degli altri, quindi

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \hat{c}_1 v_1 + \dots + \hat{c}_n v_n$$

Ma allora avrei che

$$(c_1 - \hat{c}_1) v_1 + \dots + (c_n - \hat{c}_n) v_n = \vec{0} \quad \text{vettore nullo}$$

Essendo i $v_1, \dots, v_n$ l.i. indip., per forza tutti i coeff. devono essere nulli, quindi

$$c_k - \hat{c}_k = 0 \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n$$

cioè $c_k = \hat{c}_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

— 0 — 0 —

Idea: fissata una base, ogni vettore $v \in V$ "diventa" una n -upla di numeri $c_1, \dots, c_n$ costituita dalle sue componenti.

Esempio 1 Verificare che $(1,2), (2,3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.
Scrivere le componenti di $(-1,4)$ rispetto a tale base

Devo verificare che sono lin. indep. e sono generatori,

Lin. indep. Prendo una comb. lin. generica nulla e verifico che i coeff. sono uguali a 0.

$$a(1,2) + b(2,3) = (0,0) \Leftrightarrow (a+2b, 2a+3b) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+2b=0 & a+2b=0 & a=0 \\ 2a+3b=0 & -b=0 & \leadsto b=0 \end{cases} \uparrow$$

L'unica soluzione è $a=0, b=0$ quindi sono lin. indep.

Generatori Devo verificare che ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ (A,B) è comb. lineare di $(1,2), (2,3)$

$$a(1,2) + b(2,3) = (A,B) \text{ deve avere sempre soluzione}$$

$$\begin{cases} a+2b = A \\ 2a+3b = B \end{cases} \quad (\text{È lo stesso sistema di prima, solo non omogeneo})$$

$$\begin{aligned} a+2b &= A \\ -b &= B-2A \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Questo ha sempre soluzione perché ogni colonna} \\ &\text{ha il Pivot} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & A \\ 0 & -1 & B-2A \end{array} \right)$$

Come ottengo le componenti di $(-1,4)$. Risolvendo con $A=-1$ e $B=4$, quindi

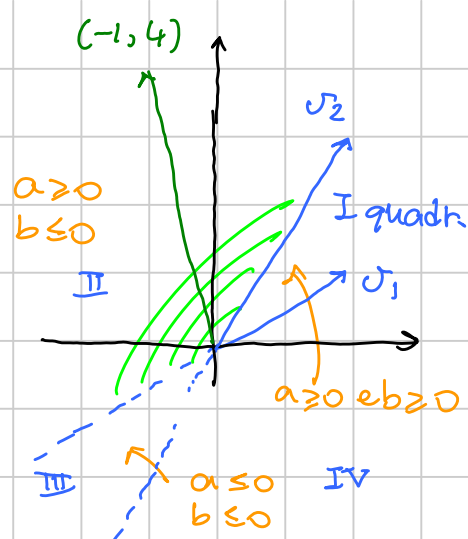
$$\begin{aligned} a+2b &= -1 & \leadsto b &= -6 \\ -b &= 6 & a &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VERIFICA: } & 11 \overset{o_1}{(1,2)} - 6 \overset{o_2}{(2,3)} \\ &= (-1,4) \quad \text{OK,} \end{aligned}$$

Interpretazione geometrica:

scrivo ogni vettore con la regola del parallelogrammo tra av_1 e bv_2

— o — o —



Esempio 2 Dimostrare che

$$v_1 = x+1$$

$$v_2 = x^2+2$$

$$v_3 = x-1$$

sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Trovare le componenti di x^2 rispetto a questa base

Lineare indipendente $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ e spero che venga $a=b=c=0$

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = a(x+1) + b(x^2+2) + c(x-1) = 0$$

$$bx^2 + (a+c)x + (a+2b-c) = 0$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a+c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a+c &= 0 \\ b &= 0 \\ -2c &= 0 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è $a=b=c=0$, cosa che si deduceva dal fatto che ogni colonna della parte coeff. ha il PIVOT.

Sono generatori Devo fare lo stesso sistema con A, B, C a dx. Viene per forza che il sistema ha soluzione unica, perché la parte coeff. è la stessa.

Componenti di x^2 Dovo risolvere $av_1 + bv_2 + cv_3 = x^2$, cioè

$$bx^2 + (a+c)x + (a+2b-c) = x^2 \quad \text{quindi}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a+c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases}$$

che è ancora un sistema lineare.

— 0 — 0 —

Sistemi lineari vs basi e generatori

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x \quad \quad + 6z = 7 \end{cases}$$

Lo posso pensare in forma vettoriale come

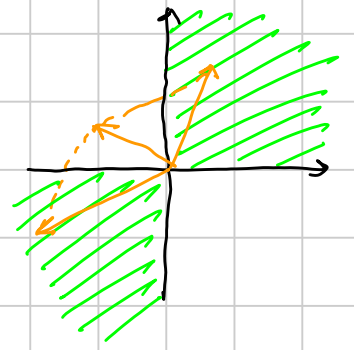
$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

In altre parole, stiamo cercando di scrivere il vettore colonna dei termini noti come comb. lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Quindi, indichiamo con $C_1, \dots, C_n$ le colonne e con B la colonna dei termini noti. Avremo che

- ① Il sistema ha soluzione se e solo se $B \in \text{Span}(\{C_1, \dots, C_n\})$
- ② Se sapessi che le colonne sono generatori, sarei sicuro che c'è sempre almeno una soluzione
- ③ Se sapessi che le colonne sono lin. indep., sarei sicuro che c'è sempre al max una soluzione
- ④ Se sapessi che sono una base, allora la soluz. è per forza unica.

Esercizio In $\mathbb{R}^2$, l'insieme costituito da 1° e 3° quadrante è un sottospazio vettoriale?



Il prodotto tra un elemento di W ed un numero qualunque sta sempre in W ? SI

La somma di 2 elementi di W sta sempre in W ? NO
Basta fare un esempio esplicito:

$$w_1 = (1, 2) \in W$$

$$w_2 = (-2, -1) \in W$$

$$w_1 + w_2 = (-1, 1) \notin W. \quad \square$$

— o — o —