

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 12

Titolo nota

15/10/2014

Def. (Combinazione lineare)

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K .

Siano $v_1, \dots, v_n$ elementi di V (vettori)

Siano $c_1, \dots, c_n$ elementi di K .

Si dice combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ una qualunque somma del tipo

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Oss. ① È ben definita perché tutti i $c_k v_k \in V$ e la somma di elementi di V sta in V .

② Se tutti i v_k stanno in un dato sottospazio W , allora la comb. lin. sta ancora in W .

Infatti i $c_k v_k \in W$ e la somma di el. di W sta in W .

Def (SPAN) Dati n vettori $v_1, \dots, v_n$ in V si definisce

$$\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$$

l'insieme di tutti i vettori che si scrivono come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.

Esempi ① $V = \mathbb{R}^3$, singolo vettore $v_1 \neq 0$

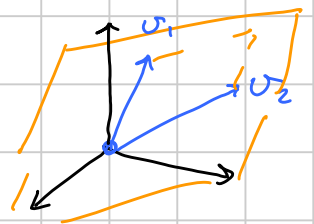
Che cos'è $\text{Span}(\{v_1\})$?

Sono tutti i vettori multipli di v_1 , cioè la retta per l'origine di direzione v_1 .

② $V = \mathbb{R}^3$, due vettori v_1 e v_2

Che cos'è $\text{Span}(\{v_1, v_2\})$?

Sono tutti i vettori del tipo $c_1 v_1 + c_2 v_2$, cioè quelli del tipo $t v_1 + s v_2$ al variare di t ed s , cioè il piano per l'origine che contiene v_1 e v_2 a meno che non siano l'uno multiplo dell'altro (in quel caso è una retta)



Teorema $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$ è un sottospazio vettoriale di V

Dim. Devo fare 2 verifiche.

Somma Prendo $w_1 \in \text{Span}$, $w_2 \in \text{Span}$. Devo dim. che $w_1 + w_2 \in \text{Span}$

$$w_1 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$w_2 = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$$

Allora

$$w_1 + w_2 = (c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c_n + d_n) v_n \in \text{Span}$$

Prodotto Prendo $w \in \text{Span}$, $a \in \mathbb{K}$. Devo dim. che $aw \in \text{Span}$

$$w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$aw = a(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = (ac_1) v_1 + \dots + (ac_n) v_n \in \text{Span}.$$

— o — o —

Def. (Linearmente indipendenti) Si dice che $v_1, \dots, v_n$ in V sono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che fa 0 è quella con tutti i coeff. nulli.

In simboli

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Viceversa, si dice che sono linearmente dipendenti se esiste una loro comb. lin. con coeff. non tutti nulli che fa 0

Esempio In $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1, 2, 3)$ e $v_2 = (2, 4, 6)$ sono

LIN. DIP. perché $v_2 = 2v_1$, cioè

$$2v_1 - v_2 = (0, 0, 0)$$

comb. lin. con coeff. non tutti nulli che fa 0

In $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, 1, -1)$ sono LIN. DIP. in quanto

$$v_3 = v_2 - 2v_1$$

e quindi

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

comb. lin. nulla con coeff. $\neq 0$ (almeno)

Def. Si dice che $v_1, \dots, v_n$ in V sono un sistema di generatori se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

In simboli

$$\forall v \in V \exists c_1, \dots, c_n \text{ in } K \text{ t.c. } v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Detto altrimenti

$$V = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}).$$

Analogamente, si dice che $v_1, \dots, v_n$ generano un sottospazio W se

$$W = \text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\}).$$

Def. Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se

- $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V ,
- $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Fatto Tutte le basi di uno sp. vett. V (supposto che ne esistano) hanno lo stesso numero di elementi.

Questo numero si dice DIMENSIONE dello sp. vett. V .

Esempio 1 $V = \mathbb{R}^3$. Una possibile base è

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$$v_2 = (0, 1, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

} Base CANONICA (quindi $\dim \mathbb{R}^3 = 3$)

Perché sono una base? Devono fare 2 verifiche

1 - Sono generatori, cioè ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 . Prendo un generico $v \in \mathbb{R}^3$ e lo scrivo come $v = (a, b, c)$, quindi

$$v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

quindi v è comb. lin. di v_1, v_2, v_3 .

2 - Sono lin. indep., cioè se $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ allora

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Facile

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (c_1, c_2, c_3)$$

e questo è il vettore nullo se e solo se $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

- Esempio 2.1 $V = \mathbb{R}^2$ Una base è $(1,0), (0,1)$
- 2.2 $V = \mathbb{R}^4$... $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$
- 2.3 $V = \mathbb{R}^n$: La base canonica ha n elementi e il k -esimo elemento ha 1 in posizione k e 0 altrove.

Esempio 3 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] =$ polinomi di grado ≤ 3 a coeff. reali.

Una possibile base è

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = x^3 \\ v_2 = x^2 \\ v_3 = x \\ v_4 = 1 \end{array} \right\} \text{Base canonica nello spazio dei polinomi di grado } \leq 3$$

Quindi la dim. è 4.

Devo fare 2 verifiche:

→ ogni pol. di grado ≤ 3 è comb. lineare di v_1, v_2, v_3, v_4

Infatti $ax^3 + bx^2 + cx + d = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$

→ sono dim. indep. perché la comb. lin. scritta sopra è il polinomio nullo se e solo se $a=b=c=d=0$.

Più in generale in $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ la dim. è $k+1$ e la base canonica è $1, x, x^2, \dots, x^k$

Esempio 4 $V = M_{2 \times 3}$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \end{array}$$

Una possibile base (la più semplice) è data da 6 vettori

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_4, \dots$$

Le verifiche sono ovvie.

Più in generale $\dim(M_{m \times n}) = m \cdot n$

Esempio 5 Prendiamo $\mathbb{R}[x] =$ tutti i polinomi a coeff. reali.

In questo caso una base con un numero finito di elementi NON esiste. Perché se prendo un numero finito di polinomi

$$v_1, \dots, v_n$$

c'è sarà un grado massimo g rappresentato, cioè $\text{grado}(v_k) \leq g$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

A questo punto ogni comb. line. di $v_1, \dots, v_n$ ha grado $\leq g$ quindi non posso ottenere tutti i polinomi.

Quindi salta l'essere generatori.

Si dice allora che $\mathbb{R}[x]$ ha dimensione INFINITA.

— 0 — 0 —