

Strutture algebriche astratte

GRUPPO

GRUPPO COMMUTATIVO

ANELLO

CORPO

CAMPO

MODULO

SPAZIO VETTORIALE

Def. (campo) Un campo è un insieme K dove sono definite due operazioni (somma e prodotto) che verificano le seguenti proprietà:

$$(S1) \quad a+b = b+a \quad \forall \dots$$

(commutativa)

$$(S2) \quad a+(b+c) = (a+b)+c$$

(associativa)

$$(S3) \quad \exists 0 \in K \text{ b.c. } a+0 = a \quad \forall a \in K$$

(esistenza dello 0)

$$(S4) \quad \forall a \in K \exists b \in K \text{ b.c. } b+a = 0$$

(esistenza dell'opposto)
$$\downarrow$$

 $-a$

$$(P1) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(P2) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(P3) \quad \exists 1 \in K \text{ b.c. } a \cdot 1 = a \quad \forall a \in K$$

$$(P4) \quad \underbrace{\forall a \in K \setminus \{0\}}_{a \neq 0} \quad \exists b \text{ b.c. } b \cdot a = 1$$

$$\uparrow$$

 $\frac{1}{a}$
(esistenza del reciproco)

$$(D) \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(Distributiva)

Esempi di campo $K = \mathbb{R}$ (numeri reali) $K = \mathbb{Q}$ (razionali) $K = \mathbb{C}$ (complessi)Esempi di strutture che non sono campi① $\mathbb{Z}$ (interi relativi) $\rightsquigarrow$ manca (P4)② $\mathbb{N}$ (naturali) $\rightsquigarrow$ mancano (S4) e (P4)③ $\mathbb{R}[x]$ = polinomi a coeff. reali $\rightsquigarrow$ manca (P4)

SPAZI VETTORIALI

Def. Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme V dove sono definite due operazioni:

- somma tra 2 elementi di V (input: 2 vettori, output: 1 vettore)
- prodotto tra 1 vettore e un elemento di $\mathbb{K}$ (input: 1 vettore e 1 el. di $\mathbb{K}$; output: 1 vettore).

Le due operazioni verificano le seguenti proprietà

$$(S1) \quad v + w = w + v \quad \forall v \in V, \forall w \in V$$

$$(S2) \quad u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u \in V, \forall v \in V, \forall w \in V$$

$$(S3) \quad \exists \vec{0} \in V \text{ t.c. } \vec{0} + v = v \quad \forall v \in V$$

$$(S4) \quad \forall v \in V \exists w \in V \text{ t.c. } v + w = \vec{0}$$

$$(P1) \quad a(bv) = (ab)v \quad \forall v \in V \quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall b \in \mathbb{K}$$

$$(P2) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V \quad (1 \text{ è quello del campo})$$

$$(P3) \quad (a+b)v = av + bv \quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall b \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V$$

$$(P4) \quad a(v+w) = av + aw \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \forall w \in V.$$

Esempi di spazio vettoriale D'ora in poi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

① $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$v = (x_1, \dots, x_n) \quad w = (y_1, \dots, y_n)$$

$$v + w = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$av = (ax_1, \dots, ax_n) \quad a \in \mathbb{R}$$

Lo 0 vettore è $(0, \dots, 0)$. L'opposto (s4) di v è $(-x_1, \dots, -x_n)$

Le verifiche delle 8 proprietà sono ovvie

② $\mathbb{R}[x]$ = polinomi a coeff. reali

Le operazioni sono

→ somma di 2 polinomi

→ prodotto di un pol. per un numero reale

Oss. I polinomi si possono anche moltiplicare tra di loro, ma per avere uno sp. vett. non serve

③ $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ = polinomi a coeff. reali di grado $\leq k$.

Oss. $\mathbb{R}_{\geq k}[x]$ NON è uno spazio vettoriale perché la somma potrebbe fare scendere il grado, ad esempio

$$p(x) = x^3 + 2x \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

$$q(x) = -x^3 + x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$$

MA $p(x) + q(x) \notin \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$, quindi la somma non funziona

④ $M_{m \times n}$ = insieme delle matrici $m \times n$ a coeff. reali è uno sp. vett. reale.

Le operazioni sono

→ somma tra matrici con lo stesso numero di righe e colonne

→ prodotto tra una matrice e un numero

Oss. Il prodotto tra matrici non è rilevante

⑤ L'insieme delle funzioni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dove $[a, b]$ è un intervallo fissato, è uno spazio vett.

Le operazioni sono

→ La somma di 2 funzioni

→ Il prodotto tra una funzione e un numero

La verifica degli assiomi è quasi ovvia.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Def. Sia V uno sp. vett. su un campo $\mathbb{K}$.

Un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ è un sottoinsieme t.c.

(1) $w_1 + w_2 \in W$ per ogni $w_1 \in W$ e ogni $w_2 \in W$

(2) $aw \in W$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ e ogni $w \in W$.

Esempi

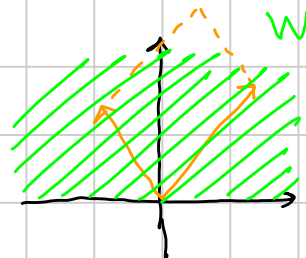
① $V = \mathbb{R}^2$, $W = \text{semipiano superiore}$
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

Devo fare 2 verifiche

→ la somma di el. di W sta in W ? SÌ

→ Il prodotto tra un elemento di W e un numero sta sempre in W ? NO, ci sta solo se il numero è ≥ 0 .

Conclusione: W NON è un sottospazio



② $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

Devo fare 2 verifiche, che a occhio sembrano andare bene

→ prendo 2 vettori generici in W

$$w_1 = (x_1, y_1) \quad \text{quindi } y_1 = 2x_1$$

$$w_2 = (x_2, y_2) \quad \text{"} \quad y_2 = 2x_2$$

La loro somma $w_1 + w_2$ sta in W ? $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
e $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2)$? SÌ, basta sommare le 2 rel. date

→ prendo $w \in W$, quindi $w = (x, y)$ con $y = 2x$

lo moltiplico per un generico $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ottergo (ax, ay)

Mi chiedo: sta in W ? cioè $ay = 2ax$?

Sì: basta moltiplicare la relazione data per a

