

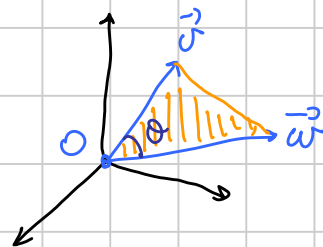
ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 10

Titolo nota

10/10/2014

Formula misteriosa e area del triangolo

Come calcolo l'area del triangolo con vertici nell'origine e in due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$?



1° modo Area = $\frac{1}{2} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \theta$

Per calcolare θ uso la formula

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \quad \text{da cui}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2}} = \frac{1}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}$$

Sostituendo nella formula per l'area trovo

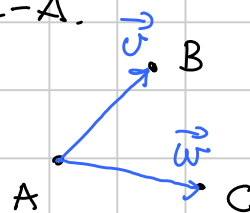
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}$$

Funziona in dimensione qualunque

In termini di componenti, se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2}$$

Oss. Se i vertici del triangolo sono 3 p.ti generici A, B, C faccio lo stesso discorso con $\vec{v} = \vec{B} - \vec{A}$, $\vec{w} = \vec{C} - \vec{A}$.
(Oppure volendo con $\vec{A} - \vec{B}$ e $\vec{C} - \vec{B}$)



2° modo Partendo da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ costruisco con la formula misteriosa il vettore $\vec{z} \perp$ a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, cioè

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1) = \vec{z}$$

Ora miracolosamente risulta

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|z\| = \frac{1}{2} \sqrt{(v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2}$$

Vale in $\mathbb{R}^3$

Per dimostrarla, basta fare i conti e vedere che viene la stessa cosa del caso precedente! (Provare!)

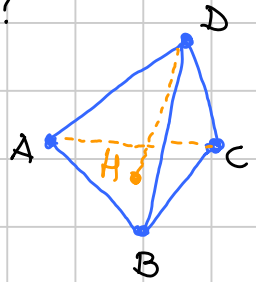
— o — o —

Come calcolo il volume del tetraedro dati i 4 vertici?

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \underbrace{\text{area base}} \cdot \underbrace{\text{altezza}}$$

↑
area di un
triangolo
(diciamo ABC)

↑
distanza di D
dal piano ABC
(dato il piano in
cartesiana, poi c'è
la formula)



Se servisse calcolare il p.to H?

Interseco il piano per A, B, C con la retta $\perp$ al piano e passante per D

— o — o —

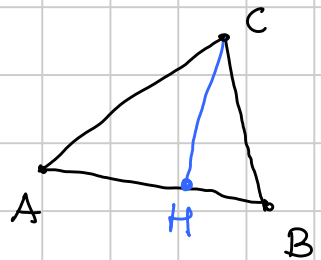
Come calcolo il piede dell'altezza di un triangolo?

Se siamo in $\mathbb{R}^2$, è percorso;

→ scrivo la retta AB

→ scrivo la retta per C e $\perp$ alla retta AB

→ calcolo l'intersezione con il sistema



Se siamo in $\mathbb{R}^3$, ci sono due strategie.

$$A = (2, 0, 3)$$

$$B = (1, 1, 0)$$

$$C = (-1, 2, 1)$$

1° modo

→ scrivo la retta AB

→ scrivo il piano per C e $\perp$ alla retta AB

→ interseco retta e piano

Retta AB : $(2, 0, 3) + t(-1, 1, -3)$

$A + t(B-A)$

Piano $\perp$ alla retta $-x + y - 3z = d$

Lo faccio passare per C : $1 + 2 - 3 = d \leadsto d = 0$
 $-x + y - 3z = 0$

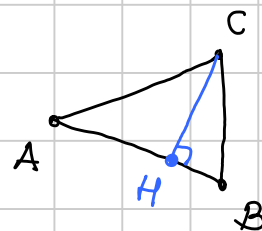
Interseco retta e piano : $(2-t, t, 3-3t)$

$-(2-t) + t - 3(3-3t) = 0$

$-2 + t + t - 9 + 9t = 0 \leadsto 11t = 11 \leadsto t = 1$

Quindi $H = (1, 1, 0)$

2° modo $\rightarrow$ il p.to H è del tipo $(2-t, t, 3-3t)$
 $\rightarrow$ impongo $CH \perp AB$, cioè
 $\langle C-H, B-A \rangle = 0$



$B-A = (-1, 1, -3)$

$C-H = (-1, 2, 1) - (2-t, t, 3-3t) = (-3+t, 2-t, -2+3t)$

$\langle B-A, C-H \rangle = \underset{-1}{3-t} + \underset{2}{2-t} + \underset{1}{6-9t} = 0$ cioè $11t = 11 \leadsto t = 1$

Come passo dalla cartesiana alla parametrica per un piano in $\mathbb{R}^3$

$x - 2y + 4z = 5$ devo scriverlo come $\vec{P}_0 + t\vec{U} + s\vec{W}$

Osservo che : $\rightarrow \vec{P}_0$ è un p.to qualunque del piano, ad esempio

$\vec{P}_0 = (1, 0, 1)$

$\rightarrow \vec{U}$ e $\vec{W}$ sono due vettori perpendicolari ad (a, b, c) .

Quindi basta trovare 2 vettori $\perp$ ad $(1, -2, 4)$.

Questo si riduce a risolvere

$x - 2y + 4z = 0$ Pongo $y=0, z=1 \leadsto x=-4$ $(-4, 0, 1)$

Pongo $y=1, z=0 \leadsto x=2$ $(2, 1, 0)$

Una possibile parametrica è

$(1, 0, 1) + t(-4, 0, 1) + s(2, 1, 0)$

provare a fare la cartesiana a partire da qui

Equazione della sfera in $\mathbb{R}^3$ Dato un centro P_0 ed un raggio r , la sfera con centro in P_0 e raggio r sono tutti i p.ti dello spazio la cui distanza da P_0 è r :
indicato con $\vec{x}$ il generico p.to, l'eq. diventa

$$\|\vec{x} - \vec{P}_0\|^2 = r^2$$

Passando in componenti $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $\vec{x} = (x, y, z)$ diventa

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

Sistemi lineari: caso $m \times n$ (Numero equazioni = numero incognite)

Prendo la matrice completa e la porto a scala. Possono succedere solo 2 cose

① Ogni colonna contiene un PIVOT e questi compaiono sulla diagonale e ogni riga ha esattamente uno zero in più della precedente.



In questo caso c'è soluzione unica qualunque cosa ci sia nella colonna dei termini noti

② Se c'è una colonna in cui manca il PIVOT, in fondo c'è almeno una riga che ha tutti zero sulla parte coeff.



Può esserci ∞ sol. o nessuna sol. a seconda del termine noto nelle righe finali.