

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 09

Titolo nota

10/10/2014

MATRICI Una matrice è una tabella rettangolare di numeri.

Si indica con $M_{m \times n}$ l'insieme delle matrici con

- m righe
- n colonne

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$$

Di solito le matrici si indicano con lettere maiuscole.

Gli elementi si indicano con lettere minuscole con 2 indici

$a_{i,j}$ = elemento che si trova nella riga i e colonna j
(si intende $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$)

Nell'esempio $a_{2,2} = 5$, $a_{1,3} = \sqrt{3}$

OPERAZIONI TRA MATRICI

Somma Due matrici $m \times n$ (stesse dim. per entrambe) le posso sommare "termine a termine".

Se $A = \{a_{i,j}\}$ e $B = \{b_{i,j}\}$, allora

$C = A + B$ ha

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Prodotto di una matrice per un numero. Se $A = \{a_{i,j}\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\lambda A = \{\lambda a_{i,j}\}.$$

Prodotto tra 2 matrici Sia A una matrice $M_{m \times k}$

Sia B una matrice $M_{k \times n}$

(il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda).

Allora posso definire il prodotto $C = A \cdot B$ nel seguente modo

- C è una matrice $M_{m \times n}$ (tante righe come A, tante col. come B)
- l'elemento c_{ij} è dato dalla formula

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

devo essere uguali

Il prodotto sarà una matrice 3×2

$$\begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

Avevi potuto calcolare $B \cdot A$? $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ no!

Oss. Se posso fare $A \cdot B$, non è detto che possa fare $B \cdot A$.

Anche $A \cdot A$ non lo posso sempre fare, anzi lo posso fare se e solo se A è quadrata ($m = n$)

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Oss. Anche quando posso fare $A \cdot B$ e $B \cdot A$, non è detto che vengano uguali. Ovviamente può succedere, ma non è obbligatorio. Il prodotto di matrici NON è commutativo.

Fatto importante Il prodotto di matrici è ASSOCIATIVO, cioè

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{purché le dimensioni siano compatibili}$$

$A \in M_{m \times k}$, $B \in M_{k \times r}$, $C \in M_{r \times n}$ così il prodotto

$$A \cdot B \cdot C \in M_{m \times n}$$

Casi particolari di matrici

- Se $m=1$ ho i **VETTORI RIGA** di dim. n $(\begin{matrix} * & * & * & \dots & * \end{matrix})$
- Se $n=1$ ho i **VETTORI COLONNA** di dim. m $\left(\begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \right)$
- Se $m=n=1$ la matrice si riduce ad un singolo numero $(*)$

Matrici speciali

- La matrice nulla è quella con tutti 0 e se la sommo ad una matrice qualunque non cambia nulla.
- Si dice **MATRICE IDENTICA** $n \times n$ la matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n=2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n=3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fatto generale Se I è la matrice identica $n \times n$ e A è una qualunque altra matrice $n \times n$, allora

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad I \cdot B = \text{NO}$$

— 0 — 0 —

Cosa succede se moltiplico una matrice per un vettore colonna?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 5x + 7y + 9z \\ y + 4z \end{pmatrix}$$

matrice 3×3 vett. col. lungo 3 ← vettore colonna (matrice 3×1)

Osservazione fondamentale La parte a dx di un sistema lineare si può sempre scrivere come prodotto tra la matrice A dei coeff. ed il vettore colonna delle incognite,

Analogamente, la parte a dx del sistema si può pensare come vettore colonna.

Quindi un sistema lineare si può sempre scrivere come

$$A x = b$$

matrice $m \times n$ ← vettore colonna ($m \times 1$) dei termini noti
numero di equazioni numero di incognite vettore colonna delle n incognite ($n \times 1$)

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5w = 3 \\ x + y - z + w = 1 \\ x + z - w = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Risolvere il sistema vuol dire trovare tutti i vettori colonna x che moltip. alla matrice A (Ax) danno il vettore B .

— 0 — 0 —

Def. Data $A \in M_{m \times n}$, si dice trasposta di A la matrice A^t ottenuta scambiando righe e colonne (quindi $A^t \in M_{n \times m}$)

Esempio Se A è quella di sopra, allora

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La trasposta dell'identità rimane lei stessa.