

Come interseco due rette in $\mathbb{R}^2$?

① Se ho le 2 equazioni cartesiane, basta metterle a sistema

② Se ne ho una in cartesiana e una in parametrica

→ o la passo entrambe in cartesiana

→ o sostituisco la param. nella cartesiana

Esempio $2x - y + 7 = 0$

$$(1, 2) + t(-1, 3)$$

$$(1-t, 2+3t)$$

sostituisco nella cartesiana

$$2(1-t) - (2+3t) + 7 = 0, \quad 2 - 2t - 2 - 3t + 7 = 0$$

$$5t = 7 \quad t = \frac{7}{5}$$

Quindi il p.to di intersezione è $(1 - \frac{7}{5}, 2 + \frac{21}{5}) = (-\frac{2}{5}, \frac{31}{5})$

③ Se invece sono entrambe in parametrica, e non voglio averle in cartesiana, cosa faccio?

$$(1, 2) + t(-1, 3)$$

$$(1-t, 2+3t)$$

$$(-1, 0) + s(1, 4)$$

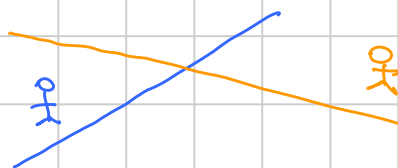
$$(-1+s, 4s)$$

Se facessi il sistema

$$\begin{cases} 1-t = -1+s \\ 2+3t = 4s \end{cases}$$

starei cercando un valore di t per cui i 2 punti si trovano nello stesso p.to.

Più in generale posso imporre il sistema



$\begin{cases} 1-t = -1+s \\ 2+3t = 4s \end{cases}$ sto cercando se esiste un p.to del piano in cui il 1° $\mathbb{L}$ passa al tempo t ed il secondo passa al tempo s .

$$\begin{cases} t+s=2 \\ 3t-4s=-2 \end{cases} \quad \begin{matrix} t=2-s \\ 6-3s-4s=-2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -7s=-8 \\ s=\frac{8}{7} \end{matrix} \quad \begin{matrix} t=2-\frac{8}{7} \\ t=\frac{6}{7} \end{matrix}$$

Avendolo a sostituire t ed s nelle param. ho l'intersezione
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Come interseco 2 rette in $\mathbb{R}^3$?

Lavoro in parametrica come nel p.to ③ precedente.

$$\begin{aligned} (0, 1, 3) + t(2, 5, -7) \\ (2t, 1+5t, 3-7t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, 3, 4) + t(1, 0, 1) \\ (1+t, 3, 4+t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2t = 1+s \\ 1+5t = 3 \\ 3-7t = 4+s \end{cases}$$

$\uparrow$ sulla 1^a $\uparrow$ sulla 2^a
 t sulla 1^a s sulla 2^a

Se non ci sono soluz., in questo caso le rette sono sghembe (i vettori velocità non sono multipli)

Se fossero incidenti, come calcolo l'angolo tra le 2 rette?

Facendo il prodotto scalare ... tra i vettori velocità,
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Come interseco due piani nello spazio?

L'intersezione può venire :
 $\rightarrow$ una retta (piani incidenti)
 $\rightarrow$ un piano (piani coincidenti)
 $\rightarrow$ niente (piani paralleli)

① Se sono in cartesiana, metto a sistema e risolvo

② Se almeno uno è in parametrica, lo passo in cartesiana con la formula esistenziale e poi sono nel caso ①.

Esempio Capire la mutua posizione dei piani

$$x+y+2z=3 \quad \text{e il piano passante per } (1,1,0), (0,1,0), (2,2,1)$$

→ 2° piano in parametrica $(1,1,0) + t(-1,0,0) + s(1,1,1)$

→ calcolo (a,b,c) con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0, 1, -1) = (a, b, c) \quad \text{quindi } y-z+d=0$$

→ calcolo d imponendo il passaggio per A : $d = -1$

$$\text{cartesiana: } y-z-1=0$$

→ metto a sistema le 2 cartesiane $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-z=1 \end{cases}$ che è già a scala

z libera $z=t$

$$y = z+1 = t+1$$

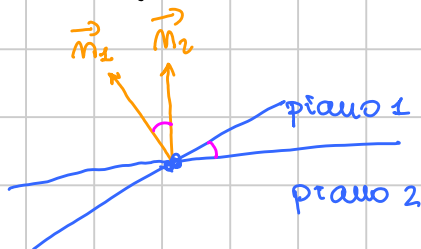
$$x = 3 - y - 2z = 3 - (t+1) - 2t = 2-3t$$

$$(x, y, z) = (2-3t, t+1, t)$$

$$= (2, 1, 0) + t(-3, 1, 1) \leftarrow \text{parametrica della retta d'intersezione}$$

Ora che so che si intersecano, come determino l'angolo tra i 2 piani?

Fatto fondamentale: L'angolo tra 2 piani è uguale all'angolo tra i vettori perpendicolari, cioè tra gli (a, b, c) della cartesiana.



Nell'esempio $(1, 1, 2)$ $(0, 1, -1)$

$$\langle (1, 1, 2), (0, 1, -1) \rangle = \|(1, 1, 2)\| \cdot \|(0, 1, -1)\| \cdot \cos \theta$$
$$-1 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \left| \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

↑
selezione tra i 2 angoli
quello tra 0° e 90°

— o — o —

Come interseco una retta ed un piano in $\mathbb{R}^3$?

- L'intersezione può venire:
- un p.to (incidenti)
 - una retta (la retta è contenuta nel piano)
 - nulla (la retta è // al piano)

La retta ce l'ho in parametrica

Il piano lo porto in cartesiana.

A questo p.to sostituisco la retta nella cartesiana

Esempio $2x + 3y - z = 5$

$$(1, 1, 0) + t(2, 1, 1)$$

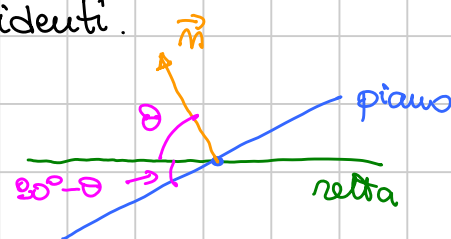
$$(1+2t, 1+t, t)$$

$$2(1+2t) + 3(1+t) - t = 5$$

$$2 + 4t + 3 + 3t - t = 5 \quad \leadsto t = 0$$

L'intersezione è $(1, 1, 0)$, quindi sono incidenti.

Per l'angolo?



L'angolo che voglio è il complementare

dell'angolo tra la retta e il vettore $\perp$ al piano

$$(2, 1, 1) \quad (2, 3, -1)$$

$$\cos \theta = \left| \frac{4 + 3 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} \right| \quad \text{e alla fine la risposta è } 90^\circ - \theta$$

Come calcolo la distanza di un p.to da un piano? $P = (x_0, y_0, z_0)$

→ scrivo l'eq. cartesiana del piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

→ scrivo l'eq. della retta passante per P e $\perp$ al piano

$$(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

→ interseco la retta appena trovata con il piano come visto sopra.

Otengo un p.to H che è la proiezione di P sul piano

→ Calcolo la distanza tra P e H, cioè $\|P - H\|$ o $\|H - P\|$. Si ottiene

$$\text{dist}(P, \text{piano}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Controllare che venga calcolando H