

EQUAZIONI DI PIANI NELLO SPAZIO

In $\mathbb{R}^3$ prendiamo 2 vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
I vettori del tipo

$$t\vec{v} + s\vec{w}$$

combinazione lineare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

quando i parametri t ed s variano in $\mathbb{R}$ descrivono tutto il piano passante per l'origine e per $\vec{v}$ e $\vec{w}$

I vettori del tipo $\vec{p}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$ rappresentano il piano che passa per il punto $\vec{p}_0$ ed è parallelo al piano precedente.

Equazione parametrica di un piano

$$\vec{p}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$$

Equazione cartesiana di un piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

Il piano passa per l'origine se e solo se $d=0$. In tal caso l'eq. diventa

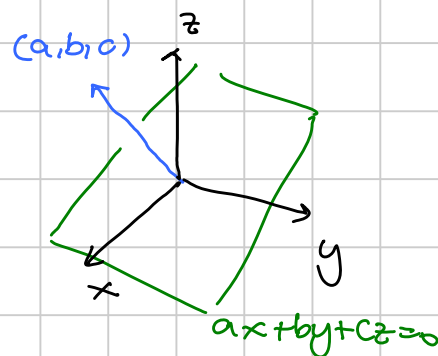
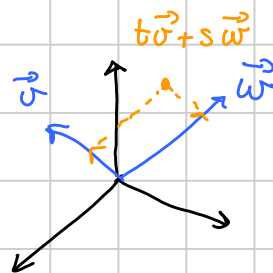
$$ax + by + cz = 0$$

che possiamo riscrivere come

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = 0.$$

Quindi il piano è costituito da tutti i vettori perpendicolari al vettore (a, b, c) .

Quando $d \neq 0$, semplicemente sto spostando il piano // a se stesso.



Retta in $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ cartesiana $ax+by+c=0$
 $\rightarrow$ parametrica $P_0 + t v$

Piano in $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ cartesiana $ax+by+cz+d=0$
 $\rightarrow$ parametrica $P_0 + t u + s w$

Retta in $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ parametrica $P_0 + t v$
 $\rightarrow$ cartesiana: scrivere la retta come intersezione di due piani

Esercizio 1 Scrivere la retta passante per $\underbrace{(1,0,2)}_A$ e $\underbrace{(3,-1,4)}_B$

Risposta: $A + t(B-A) = \underbrace{(1,0,2)}_{\text{start}} + t \underbrace{(2,-1,2)}_{\text{velocità}}$

$B + t(A-B)$ andava bene uguale

$B + t(B-A)$ " " "

Esercizio 2 Scrivere il piano passante per $\underbrace{(0,1,1)}_C$, $\underbrace{(2,0,3)}_D$, $\underbrace{(4,1,0)}_E$

1° modo Scrivo l'eq. parametrica $C + t(D-C) + s(E-C)$

$t=s=0 \leadsto C$

$t=1, s=0 \leadsto D$ $(0,1,1) + t(2,-1,2) + s(4,0,-1)$

$t=0, s=1 \leadsto E$

2° modo Se voglio l'eq. cartesiana la cerco del tipo $ax+by+cz+d=0$ con coeff. a, b, c, d incogniti e impongo di passare per i 3 pt.

$b+c+d=0$ (passare per C)

$2a+3c+d=0$ (" " D)

$4a+b+d=0$ (" " E)

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

la colonna della d è senza pivot, quindi d è libero e le altre 3 variabili si ricavano di conseguenza

$$d \text{ a piacere, } -7c - 2d = 0, \quad c = -\frac{2}{7}d$$

$$b + c + d = 0, \quad b = -c - d = \frac{2}{7}d - d = -\frac{5}{7}d$$

$$2a + 3c + d = 0 \quad a = -\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}d = \frac{6}{14}d - \frac{1}{2}d = -\frac{1}{14}d$$

$$\text{La sol. gen. del sistema è } \left(-\frac{1}{14}d, -\frac{5}{7}d, -\frac{2}{7}d, d\right)$$

Come d scelgo $d = 14$ e ottengo $(-1, -10, -4, 14)$ cioè l'eq.

$$-x - 10y - 4z + 14 = 0 \quad \text{o volendo} \quad \boxed{x + 10y + 4z - 14 = 0}$$

VERIFICO C, D, E: OK

Oss. È giusto che una variabile resti libera !!

3° modo Si può ottenere la cartesiana dalla parametrica mediante la FORMULA MISTERIOSA

Parto dalla param. $(0, 1, 1) + t(2, -1, 2) + s(4, 0, -1)$.

Il vettore (a, b, c) dei primi coeff. della cartesiana deve essere $\perp$ ai 2 vettori $(2, -1, 2)$ e $(4, 0, -1)$. Come posso trovare un vettore $\perp$ a 2 vettori dati? Posso imporre i 2 prod. scalari $= 0$ e fare il sistema, oppure in $\mathbb{R}^3$ c'è una formula

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} &(-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = \textcircled{1}^a \\ &(2) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -10 \rightsquigarrow \text{cambio segno} \rightsquigarrow \textcircled{10}^b \\ &2 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 = \textcircled{4}^c \end{aligned}$$

In generale se ho $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
 $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

allora un vettore $\perp$ a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è dato da

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)}$$

Vettore $\perp$ a $\vec{v}$ e $\vec{w}$: provare a fare il prodotto scalare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e vedere che viene 0.

Finale: una volta trovati a, b, c , trovo d imponendo di passare per uno dei 3 pti dati

$$x + 10y + 4z + d = 0 \quad \text{impongo di passare per } C = (0, 1, 1) \\ \text{e ottengo } d = -14,$$

Esercizio 3 $A = (-1, 0, 0)$ $B = (2, 2, -3)$ $C = (1, 1, 1)$

Scrivere eq. cartesiana del piano passante per C e $\perp$ alla retta AB

Scrivo la retta AB: $A + t(B-A) = (-1, 0, 0) + t(3, 2, -3)$

Il generico piano $\perp$ alla retta deve essere $\perp$ al vettore $(3, 2, -3)$
 quindi deve essere della forma

$$3x + 2y - 3z + d = 0$$

Ora trovo d imponendo il passaggio per C: $d = -2$, quindi il piano è $\boxed{3x + 2y - 3z - 2 = 0}$.

Esercizio 4 Trovare la retta passante per $(2, 2, 0)$ e perpendicolare al piano dell'esercizio 2.

Prendo la cartesiana del piano: $x + 10y + 4z - 14 = 0$ e uso (a, b, c) come direzione della retta.

Quindi la retta è

$$(2, 2, 0) + t(1, 10, 4).$$